



**DELHI UNIVERSITY
LIBRARY**

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. *B5* *168M72*

Ac. No. *230686*

Date of release for loan
-1 JUL 1975

This book should be returned on or before the date last stamped below.
An overdue charge of **5 Paise** will be collected for each day the book is kept overtime.

عاشق نامہ

سب حکیم جناب ڈاکٹر آف سیکل انٹرنیشنل ملک اووہ

بابوشیوئل پریسا و صاحب

کوئٹہ اسکول صحت او نام نے

تصنیف فرمائی

وائسے مکاتب و مدارس سیکل انٹرنیشنل ملک اووہ کے

مطبعت فشر نوکسور سنام لکھنؤ میں

علم مثلث

۱ خطوں کی درازگی جبر و مقابلہ کی مقداروں میں کہی جاسکتی ہے۔

اگر ایک گرہ یا گز کو اول سے بنائی کی ایکائی مقرر کریں تو کسی خط میں یہ مقرر اور محمد و خط یعنی گرہ یا گز جتنے بار اسکے وہ او کی بنائی ہے خلا اگر ایک گرہ کو بنائی کی ایکائی مقرر کریں تو کسی خط میں تیس کمین کے اگر ایک گرہ اوسین تین دفعہ جاسکے ہی طرح سے کئی خط کو آکیر گز اگر ایکائی بنائی کی اوسمین آدفعہ اسکے۔

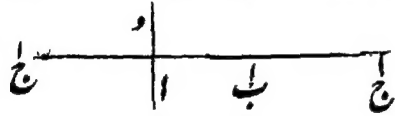
۲ اگر ارون خطوط کو جو کسی خط معین کے ایک طرف کیجئے جاتے ہوں مثبت کمین ارون خطوط کو جو خط مذکور کی دوسری طرف کیجئے جاتے ہوں منفی کمین۔

ج ب ج

اگر ایک خط اب میں جو نقطہ سی او خط کے متب طرف

عمود کھینچا گیا ہے دوسرا خط مفروضہ جو زیادہ کار ہو تو ظاہر ہے

کہ اب کو ج نقطہ تک بڑھانا چاہیے بیان تک کہ ب ج خط مفروضہ کی برابر ہو اور اگر اب خط سے ایک خط عمود دکاٹ لینا درکار تو ب آئے ب ج کمر خط معینہ کے برابر کاٹنا چاہیے اور آج کمر باقی رہ جائیگا اگر خط اب کو ل مقرر کریں اور ب ج کو م اور ب ج = ب ج ایسے ا ج + ج ب = اب، ج = اب - ج ب = ل - م اگر م بڑا ہو ل متو ب خط ج، خط آ کی بائیں طرف واقع ہوگا اور خط ا ج = ل - م = - (م - ل) اور ایسے - (م - ل) مقدار منفی ہے اور قدین برابر ہے خط اب و خط ب ج کی تفاوت کی جو تفاوت یعنی ا ج اس حالت میں خط ا کی بائیں طرف واقع ہے۔



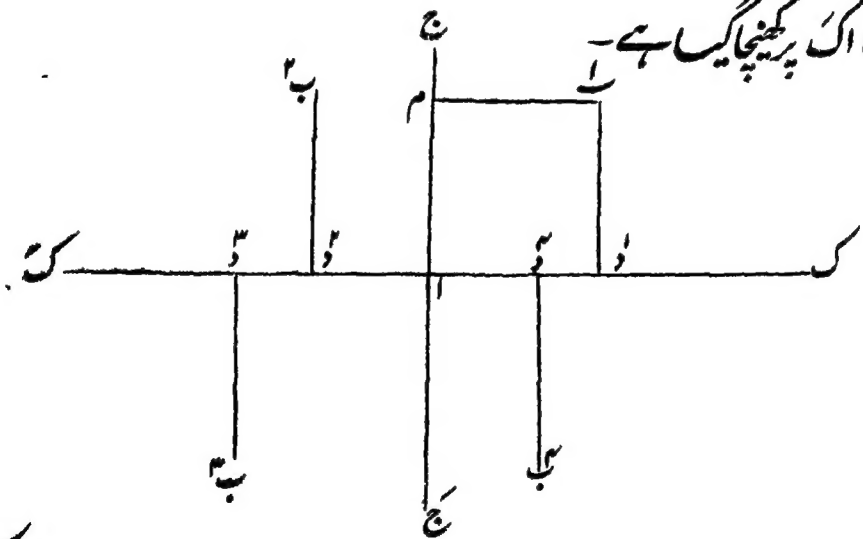
پس اگر کسی خط کی عوض میں مقدار منفی لکھیں اس سے یہ مراد ہے کہ خط مذکور واقع ہے بجانب محاذی اوں خطوط کو جس کے عوض میں مقادیر منقی کئے گئے ہیں۔

۳ فرض کرو کہ خطوط ک اک اور ج ایج ایک دوسرے پر عمود واقع ہیں اگر مناسب سمجھو تو حسب ضرورت ان خطوط کو لا انتہا بڑھاؤ تب موقع کسی نقطہ ب کا اندازہ سطح ان خطوط کے معلوم ہو سکتا ہے اگر لنبائی اوں خطوط ب ڈ و ب م کے دیا م واؤ کا جواب ب ڈ و ب م کے برابر ہے معلوم ہو کہ جو نقطہ ب سے خط ک اک اور ج ایج پر عمود ڈاٹے گئے ہیں۔ نقطہ ب کے کوآرڈینیٹ کہلاتے ہیں۔

نسبت اون خطوط کے جو نقطہ اسی طرف خط ک اک کے کہینچے جاوین قاعدہ معمولی یہ ہے کہ
وے خطوط جو خط ج آج کی دہنی طرف واقع ہین مثبت کہلاوینگے اور وے جو بائیں طرف
واقع ہین منفی۔

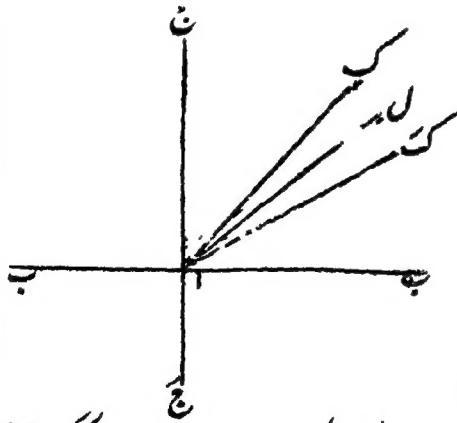
نسبت اون خطوط کے جو نقطہ اسے خط ج آج پر کہینچے جاوین قاعدہ معمولی یہ ہے کہ
وے خطوط جو ک اک کی اوپر طرف واقع ہین مثبت کہلاوینگے اور جو ک اک کے نیچے
کو ہین منفی کہلاوینگے۔

مثلاً اگر نقطہ ب واقع ہو اندر سطح محدود بخط ج اک تو اسکا آرڈینیٹ خط جو
ک اک پر کہینچا گیا ہے۔



مثبت کہلاوینگا کیونکہ ج آج کی دہنی طرف واقع ہے اور اسکا آرڈینیٹ ب اوکسی
نقطہ ک اک سے آج کی سمت میں کہینچا گیا ہے مثبت کہلاوے گا کیونکہ ک اک کی

اوپر طرف واقع ہے لیکن اگر نقطہ ب واقع ہو اندر سطح محدود بخط اج اور اک کی تو
اوسکا آرڈینیٹ خط او جو ک اک پر کینچا گیا ہے منفی کملاوے گا کیونکہ ج اج کی بائیں
طرف واقع ہے اور اوسکا آرڈینیٹ خط او جو کسی نقطہ ک اک سے اج کی سمت
میں کینچا گیا ہے مثبت کملاوے گا کیونکہ وہ ک اک کی اوپر طرف واقع ہے سیٹھ آرڈینیٹ
ب۔ ب کی جو سمت ک اک کیچھے گئے ہیں منفی اور مثبت کملاوے گئے یعنی وہ آرڈینیٹ
جوج ایچ کے بائیں طرف واقع ہے منفی کملاوے گا اور وہ آرڈینیٹ ب کا جوج ایچ
کی دہنی طرف واقع ہے مثبت کملاوے گا اور ب و کے آرڈینیٹ جو کسی نقطہ ک اک
سے بست ایچ کیچھے گئے ہیں ہر دو حالت میں منفی کملاوے گئے کیونکہ ہر دو حالت میں آرڈینیٹ
ک اک کے نیچے طرف واقع ہیں۔



۴۴ اصطلاح اگر کوئی سیدھا خط ایک ہی
سطح کے اندر اپنی نقطہ انتہائی یعنی اک کی طرف
کسی جگہ مسبتہ یعنی اب سے کسی اور جگہ
یعنی ال تک گھومی تو خطوط اب اور ال کی

جگہ کو زاویہ کہیں گے اور اس زاویہ کو مروف ب ک یا ک اب سے بتلاوے گے اور
درمیانی ہمیشہ وہ نقطہ ہوگا جہاں خطوط اب وال ملتی ہیں اگر اس طرح کی گردش متنی جاوے

توزوئیہ نوع کسی قد کا ہو سکتا ہے۔

۵ اگر خط ا ج برابر ہو جانب خط اب و اب کی توزاویہ جات ب ج و ج ا ج ہر دو قایمہ ہیں۔

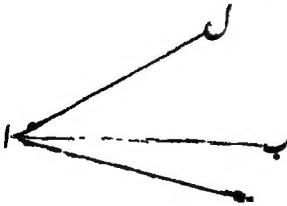
۶ زاویہ منفرجہ قایمہ سے بڑا ہوتا ہے اور زاویہ حادہ قایمہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

۷ خط ال کو خط معینہ اب سے ایک رخ میں گمانی سے جو زاوی بنے اگر او کو نقطہ تصور کریں تو اون زاویوں کو منفی کہیں گے جو خط ال کو خط معینہ اب سے مختلف رخ میں گمانی سے بنے اگر زاویہ ب ال میں کوئی اور زاویہ جو زاویہ کا رہے تو خط ل اکہ ب ل کی طرف گھوماوین یہاں تک کہ زاویہ ل اکہ برابر ہو اوس زاویہ کے جسکا بڑ منظور تھا تب زاویہ ب اکہ زاویہ مطلوبہ کی مساوی ہوگا اور اگر زاویہ ب ال سے کہ دوسرا زاویہ لکنا منظور ہے تو ظاہر ہے کہ خط ال کو جانب مختلف میں گھوماوین یہاں تک کہ خط مذکور ک کی جگہ میں آوے اور زاویہ ک اب اوس زاویہ کی برابر ہو جسکا منظور تھا تب ل اکہ + ل ک اب = ل ب ال

∴ ل ک اب = ل ب ال - ل اکہ

اگر زاویہ ل اکہ بڑا ہو زاویہ ب ب ال سے تب خط ک اب کی دوسری طرف واقع ہوگا اور ل ک اب = ل ب ال - ل اکہ

= ل ب ال - ل اکہ



دور یہ مقدار منفی ہے جس کا قدر زاویہ جات ل اک و ب اک کی تفاوت کے برابر ہے
دور یہ تفاوت اس حالت میں اب کی نیچے طرف ہے۔ پس اگر کسی زاویہ کو منفی کہیں تو
اس سے یہ مراد ہے کہ زاویہ مذکور گردش کنندہ خط کو اس رخ کی ٹھیک مختلف جانب
موانی سے موضوع ہوا ہے جس رخ میں کہ گردش کنندہ خط کو خط معینہ اب سے گمانی میں
زاویہ جات مثبت نہیں گے

اہل انگلستان نے ایک زاویہ قلمیہ کو برابر نوے حصوں میں منقسم کیا ہے جبکہ دسے گو
باری کہتے ہیں ایک ڈگری میں ساٹھ منٹ ہوتے ہیں اور ایک منٹ میں ساٹھ سکند
سی زاویہ کا قدر اسکے لکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ زاویہ مذکور میں کے ڈگری و منٹ و سکند میں
لر جمع مراتب کسی زاویہ کا قہ باننا ہوے تو حصص زاویہ جو ایک سکند سے کم ہیں سکند کی
مراعات یہ میں لکھے جائیگے ڈگری و منٹ و سکند یوں لکھے جاتے ہیں ۴۰ ۲۰ ۵۰ =

۹ فرانس اور برطانیہ یورپ کے اور ملکوں کی ریاضی والوں نے ایک قایمہ کو برابر موصول
ہوئی ہے جس کو دے لوگ گریڈ کہتے ہیں ایک گریڈ میں ہونٹ ہوتی ہیں اور ایک منٹ
میں سیکنڈ اور ان کے علامات یہ ہیں ۶۰ و ۲۰ و ۳۰ و ۴۰

چونکہ $\frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$

اسٹور اوپننگ روڈ بالائیون کھینا جاسکتا ہے ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ اس سے یہ نکلتا ہے کہ اگر تفتیق

فرانسیسی کہیں تو جو طرح کہ کسور اشاریہ کا جمع تفریق و ضرب تقسیم ہوتا ہے اوسے طرح اسکا بھی ہونیکا اور یہ فائدہ انگریزی طور پر لکھنے سے نہیں ملتا۔

طریق جانتے فرق درمیان انگریزی و فرانسیسی تقسیم کے زاویہ ب اس میں حسین کرڈ و ڈگری ہر دو تصور میں

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \text{ انگ } \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \text{ فایہ}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \text{ گ } \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \text{ فایہ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \text{ انگریزی} \\ (2) \dots \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \text{ انگریزی} \end{array} \right\} \text{ اور } \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \text{ انگریزی}$$

تنبیہ قاعدہ آخرین کی اتھال کر زمین زاویہ کے منٹ و سکند کو ڈگری کے کسور اشاریہ میں رکھنا ضرور پڑے گا کیونکہ اوس جگہ حرف انگ کے معنی انگریزی ڈگری کے ہیں

مثیل اول

$$\begin{array}{r} ۳۲۶۳۳۵۶ = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} \\ ۳۲۶۳۳۵۶ = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} \\ \text{انگ} = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} = \frac{۳۲۶۳۳۵۶}{۱۰} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳۶۵۱۱۱۰۳ \\ ۹۰ \end{array}$$

اگر ایک سکند کو دسویں حصہ کو کہیں اور باقی کو روکریں

$$\begin{array}{r} ۳۹۵۷۴۴ \end{array}$$

تو زاویہ ۳۲۶۳۳۵۶ و ۳۲۶۳۳۵۶ برابر ہے ۳۲۶۳۳۵۶ و ۳۲۶۳۳۵۶

تشیل دوم

رویه ۲۴ و ۱۵ ڈھ مین کٹنی گریڈ ونٹ و سکند مین ۵ پہلے ونٹ و سکند کو ایک ڈگری کے
السر عشا یہ مین لاؤ۔

$$۶۰ \times ۲۵ =$$

$$۲۴ \times ۸۶۲۵ =$$

$$۶۰ \times ۵۱۶۵ =$$

$$۲۴ \times ۶۶۲۵ =$$

$$۲۴ \times ۹۲۰۰ =$$

$$۲۴ \times ۹۲۰۰ =$$

۱۱۔ متمم کسی زاویہ کا وہ کملات جبکہ مانے سے زاویہ مذکور پورا قایم ہو۔ اورے جیسے

$$۹۰^\circ - ۲۴^\circ = ۶۶^\circ \text{ اور یہ } ۲۴^\circ \text{ و } ۳۲^\circ \text{ کا متمم ہے اور اس پر } ۹۰^\circ \text{ ---}$$

$$۱۱۰^\circ - ۱۵^\circ = ۹۵^\circ \text{ (۲۰ و ۱۵) کا متمم ہے۔}$$

۱۲۔ تنمیم کسی زاویہ کا وہ ہے جسکے جوڑنے سے زاویہ مذکور برابر ہو یا وہی دوزاویہ قائم کیے

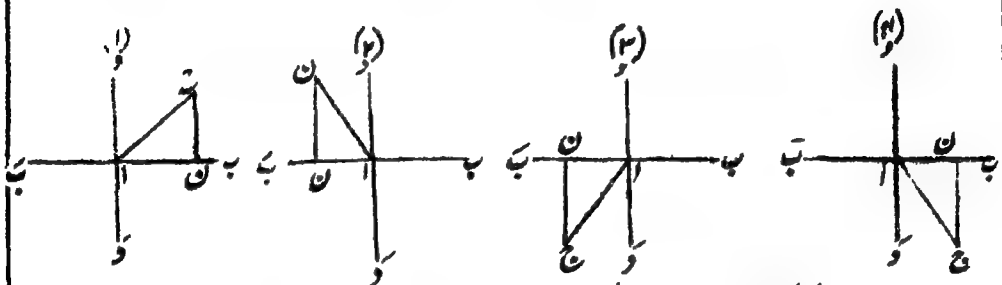
$$۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ = ۱۶۰^\circ \text{ تنمیم ہے } ۲۰^\circ \text{ و } ۲۰^\circ \text{ کا}$$

باب دوسرا

بیان اصطلاحات او چند قاعدوں کا جو اون پر منحصر ہیں *

۱۳۔ علم ثالث اسطرح کے نقوی سننے ایسی مثلثوں کی پیمائش ہے جو سطح پر واقع ہوں

اور اصطلاح میں یہ وہ علم ہے جس میں ذکر ہے اون قاعدوں کا جن سے تناسبات زاویوں کے معلوم ہو سکتے ہیں اور جس میں ذکر ہے طریق نکالنے کے شکل مستقیم الاضلاع کی باقی اضلاع و زاویوں کا بذریعہ ایسے اضلاع یا زاویوں کے جن سے اول نکالنا ممکن ہو۔



۱۴ فرض کرو کہ کوئی خط مستقیم کسی خط معینہ اب کے نقطہ اکی گردش کروں $\overline{ب}$ و $\overline{ب}$ و $\overline{ب}$ کی جہات میں گردش کرتا ہے اور درمیان اپنی گردش کے مثل خط آج کے واقع ہے خط آج کے کسی نقطہ ج سے ایک عمود ج ن خط (اب) پر گراؤ اور اگر فرض جانو تو اب کو کسی طرف بڑھاؤ اور نقطہ آ سے خط (داؤ) کو (اب) پر عمود گراؤ اب ہو جب دفعات دوم اور سوم کے ان اشکال میں خط ج ن کی علامات مثبت و مثبت و منفی و منفی ہیں

۱۵ اصطلاحات دفعہ ۱۴ کی اشکال دیکھو

اصطلاح ۱ $\frac{ج}{ن}$ زاویہ براج کا (سائین) ہے یعنی $\frac{ب}{ج} = \frac{ن}{ج}$

۲ $\frac{ج}{ن}$ زاویہ براج کا کوسائین ہے کوسائین $\frac{ب}{ج} = \frac{ن}{ج}$

۳ $\frac{ج}{ن}$ زاویہ براج کا ٹانجنٹ ہے ٹانجنٹ $\frac{ب}{ج} = \frac{ن}{ج}$

اصطلاح ۴ $\frac{\text{باج}}{\text{باج}}$ زاویہ باج کا سینٹ ہے یا سک و باج = $\frac{\text{باج}}{\text{باج}}$

۵ (آ- کوٹیں) باج م زاویہ باج کا ورڈ ساین ہے یا ورس و باج = ۱-

کاین و باج

۶ (۰) زاویہ باج کے متمم کا ٹانجٹ زاویہ باج کا کوٹانجٹ کہلاتا ہے

یا کوٹ (و باج) = ٹان (و باج)

حاصل (۶)

اگر (۰ و باج) اصلی زاویہ ہو تو اس زاویہ کا متمم و باج ہے (دفعہ ۱۱)

۰ کوٹ (و باج) = ٹان و باج یا ٹان و باج = کوٹان (و باج)

زاویہ باج کی متمم کے سینٹ کو زاویہ باج کا کو سکٹ کہتے ہیں -

یا باج و باج = سک و باج

حاصل دوم

اگر (۰ و باج) اصلی ہو تو اس کا متمم و باج ہے (دفعہ ۱۱)

۰ کو سک (و باج) = سک و باج یا سک و باج = کو سک (و باج)

زاویہ باج کے کو ساین کو و باج کے متمم کا ساین کہتے ہیں -

۰ نہ نہ کو س و باج = $\frac{\text{باج}}{\text{باج}}$ = من و باج = من و باج (بوجوب دفعہ ۱۱)

اور س ذ ب ا ج = $\frac{ا ج}{ا ب}$ = کوس ذ ا ج ن = کوس (ب - ۹۰ - ب ا ج)

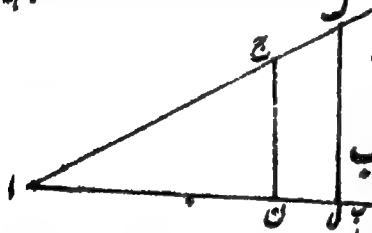
یا کسی زاویہ کا سین او کی متمم کی کوسین کے مساوی ہے۔

اختصار کلام کی واسطے اس وقت سے صرف ایک ہی حرف سے زاویہ بتلایا جاوے گا مثلاً س ا

کوس آوٹان ب اس جگہ حروف آو ب اپنی اپنی زاویوں کے ٹو گری بتلاتے ہیں۔

۱۷۔ جب تک کسی زاویہ کا مقدار تبدیل نہ کیا جاوے تب تک اس کی سین کوسین وغیرہ وہی رہیں گی۔

مقدار ا ج کا کچھ ہو کیونکہ اگر خط ا ج کی کسی دوسرے نقطہ ک سے ک ل ایک عمود ب ا پر گرایا جاوے تو بموجب



اصطلاح (ا) سین زاویہ ا = $\frac{ا ج}{ا ب}$ یا سن ا = $\frac{ل ک}{ا ب}$

(شکل دوم مقامہ ششم) لیکن بموجب خاصیت متضاد مثلثوں کے $\frac{ا ج}{ا ب} = \frac{ل ک}{ا ب}$

یعنی س ا کا وہی رہے گا نقطہ ج خط ا ج میں چاہے جہاں واقع ہو۔

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ کوس آو س آوٹان آو سک آو غیرہ بلا تبدیل

رہیں گے جب تک کہ قدر زاویہ کا تبدیل نہ کیا جاوے۔

اس سے یہ ثابت ہوا کہ اگر مقدار س ا یا کوس آو یا ٹان آو یا سک آو کے معلوم ہوں

تو کل مقادیر زاویہ آ کے معلوم ہو سکتے ہیں۔

۱۸ تناسبات موسوم سین کوسین ٹانخٹ وغیرہ کو تناسبات مساجح الزاوا

کہتے ہیں: چونکہ اگر انہیں سے کوئی تناسب معلوم ہو تو وہ زاویہ جس کا یہ تناسب ہے معلوم ہو سکتا ہے۔

۱۹. یق ظاہر کرنے دیں آد کوٹا کو سکا کو بذریعہ ضلع مثلث اج ن (شکل دفعہ ۲)

۱۔ درس ۱ = ۱۔ کوس آ

$$\frac{1}{2} - 1 =$$

۲ سکوت ۱ = ٹان (۹۰-۱)

= ٹان اچ ن

$$\left(\frac{\text{ان}}{\text{ح}} \right) =$$

۳ کریک آ = سک (۱-۱) (بوجب اصلاح انجنیٹ کے)

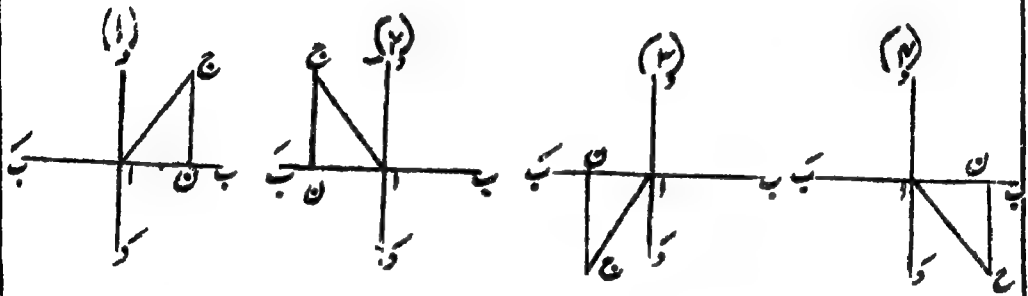
= سک (رجن)

$$= \frac{16}{24} \quad (\text{یو جب مطلقاً حسی گنت})$$

۲. طریق دریافت کرنے تبدیل علامات الجبر یعنی مثبت یا منفی ہوئاس آد کو س آٹھ

(ام) بن ا = لچ اور اس لیے بہر حال وہی علامات ہونگے جو نچ کے ہیں
کیونکہ لچ جواب یا آؤ کے رخ میں نہیں ہے اپنی علامت نہیں بدل سکتا اور اسد اسی نسبت ہے

پس سن مثبت ہے اگر زاویہ اصفر اور ۸۰ ڈگری کے چپین ہو (شکل اول و دوم)
 اور منفی ہے اگر زاویہ ۱۸۰ اور ۳۶۰ کے درمیان میں ہو (شکل سوم و چہارم)
 (۲) کوس ۱ = $\frac{a}{c}$ اور اس لیے اس کے علامت وہی ہونگے جو ان کے ہیں۔
 پس کوس مثبت ہے اگر زاویہ اصفر اور ۹۰ ڈگری کے بیچ میں ہو۔
 * یا ۲۷۰ اور ۳۶۰ کے درمیان میں ہو (شکل اول و چہارم)
 اور کوس منفی ہے اگر زاویہ ۹۰ اور ۲۷۰ کی درمیان ہو (شکل ۲ و ۳)



(۱۳) ٹان ۱ = $\frac{a}{b}$ اور اس لیے اگر ن ج اور ان کے ایک ہی علامت ہو یعنی
 اگر ان دن ج متحد علامت ہو تو مثبت ہے اور اگر مختلف علامت ہو تو منفی ہے
 اس لیے ٹان مثبت ہے اگر زاویہ اصفر اور ۹۰ یا ۱۸۰ اور ۲۷۰ کی درمیان ہو (شکل اول و دوم)
 اور ٹان منفی ہے اگر زاویہ ۹۰ اور ۱۸۰ یا ۲۷۰ کے درمیان ہو (شکل اول و دوم)
 (۲) سک آ = $\frac{a}{c}$ اور اس لیے اس کا وہی علامت ہے جو ان کا ہے۔

پس تک مثبت ہی اگر زاویہ آصفر اور ۹۰° یا ۲۷۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ہوا تو تک
منفی ہے اگر زاویہ آ ۹۰° اور ۲۷۰° ڈگری کے درمیان ہو۔

۲۱ طریق دریافت کرنے تبدیل مقادیر ساین کو ساین ٹانجنٹ
وسکینٹ کا جبکہ زاویہ صفر ڈگری سے ۳۶۰ ڈگری تک برتاوی
(اشکال متعلقہ دفعہ ۲۰)

چونکہ مقادیر ساین کو ساین ٹانجنٹ وسکینٹ کے خط اچ کی مقدار پھر پھر ہیں (۱۷)
لہذا اس خط کی مقدار کو اس حالت میں غیر تبدیل رہنے دو جب زاویہ آ صفر ڈگری ۳۶۰
ڈگری تک بڑھتا جاوے۔

(موجب شکل ۱) چونکہ اچ مقام اب سی او کو گومتا ہے لہذا خطان ج مقدار میں صفر
اچ تک بڑھتا ہے اور اس لیے مثبت ہے اور ان آج سے صفر تک گھٹتا ہی اور مثبت ہی
(موجب شکل ۲) آج مقام او سی او کو گومتا ہے لہذا خطان ج مقدار میں گھٹتا ہی آج سے
صفر ڈگری تک اور مثبت ہے اور ان صفر سے آج تک بڑھتا ہے اور منفی ہے۔

(موجب شکل ۳) چونکہ اچ مقام اب سے او کو حرکت کرتا ہے مقادیر ان ج کی صفر سے
اچ تک بڑھتا ہے اور اس لیے منفی ہے اور ان آج سے صفر تک گھٹتا ہے اور
منفی ہے۔

بوجب شکل ۴) چونکہ آج مقام اُدسے اب کو حرکت کرتا ہے لہذا آج مقدار میں آج سے صفر ڈگری تک کٹتا ہے اور منقی ہے اور آج صفر ڈگری سے آج تک بڑھتا ہے اور آج مثبت ہے پس اس سے یہ نکلا۔

○ وزاویہ آہر تھا ہے				
صفر ڈگری اور ۰ تک	۰ سی ۱۸۰ : ۰ تک	۰ سی ۲۷۰ : ۰ تک	۰ سی ۳۶۰ : ۰ تک	
۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	من (۰ : ۰)
۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	کوسا (۰ : ۰)
۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	ٹان (۰ : ۰)
۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	۰ سی ۰ : ۰ تک	سکا (۰ : ۰)
سایں کو سایں ٹانجیت و سکیٹ کے تبادلات یوں ہی دکھائے جا سکتے ہیں اور یہ تبادلات متبادلات متبادلات کے ہوتے ہیں وہ علامات جو ہر ساس و کوسا میں وٹانجیت و سکیٹ کے لیے ضرور ہیں ہر ایک قاعدہ میں لگے ہوئے ہیں علامت ص سی یہ : اوہے کہ وہ علامت جسمین ایسی علامت ہے لا انتہا بڑی ہے۔				
صفر ڈگری اور ۰ کی ہو	۰ اور ۱۸۰ کے ہو	۰ اور ۲۷۰ کے ہو	۰ اور ۳۶۰ کے ہو	اگر زاویہ آدرسیان
صفر اور (+)	آ اور صفر (+)	صفر اور (-)	۱۸۰ اور صفر (-)	من ۱ وریسیان

$$\text{سن} = ۱ = \frac{\text{ن ل}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{م ج}}{\text{ا ج}} = \text{سن ب ا ج}$$

$$= \text{سن (ب ا د + د ا ب - ب ا ج)}$$

$$= \text{سن (۱۸۰ - آ)} \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{سن} = ۱ = \frac{\text{ن ل}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ج ج}}{\text{ا ج}} \text{، کیونکہ ن ل} = - \text{م ج}$$

$$= - \frac{\text{م ج}}{\text{ا ج}}$$

$$= - \text{سن (ب ا د + د ا ب - ب ا ج)}$$

$$= - \text{سن (۱۸۰ + آ)} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{سن} = ۱ = \frac{\text{ن ل}}{\text{ا ج}} = \frac{- \text{ن ج}}{\text{ا ج}} = - \frac{\text{ن ج}}{\text{ا ج}}$$

لہذا $\frac{\text{ن ج}}{\text{ا ج}}$ خواہ زاویہ مثبت { ب ا د + د ا ب + ب ا ج } خواہ زاویہ منہا { ب ا ج - د ا ب - ب ا ج }

ہے یا زاویہ منہا ب ا ج کا ساں ہے (۳)

$$\text{سن} = ۱ = - \text{سن (۱۸۰ - آ)} \dots\dots\dots (۳)$$

$$\text{یا} = - \text{سن (۱ - آ)} \dots\dots\dots (۴)$$

شرح مناسب تھا کہ اگر زاویہ بات مذکورہ بالا بصراحت لکھے جاتے تو بطور پرکھو جا

(۱) د (۱۸۰ - آ) د (۱۸۰ + آ) وغیرہ

۲۳ مطابق طریق مذکورہ دفعہ ۲۲ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$(۱) \text{ کوس } = - \text{ کوس } (۱۸۰^\circ - \text{کوس } \bar{A}) = - \text{ کوس } (۱۸۰^\circ + \bar{A}) = \text{کوس } \bar{A}$$

$$(۲) \text{ کوس } = \text{کوس } (۲۶۰^\circ - \bar{A})$$

$$(۳) \text{ کوس } = \text{کوس } (۱۸۰^\circ - \bar{A}) = \text{کوس } (۱۸۰^\circ + \bar{A}) = - \text{کوس } \bar{A}$$

$$(۴) \text{ کوس } = - \text{کوس } (۱۸۰^\circ - \bar{A}) = - \text{کوس } (۱۸۰^\circ + \bar{A}) = \text{کوس } \bar{A}$$

۲۴ اگر زاویہ باج میں ۳۶۰° ڈگری جوڑی جاوین تو وہ خط خن سے زاویہ

مذکور محدود ہے پس مقام میں آجاوین گے اور زاویہ مذکور کا سامن غیر مسل رہے گا

اس لیے ہر حالت میں $\text{سن } \bar{A} = \text{سن } (۱ + ۳۶۰^\circ)$ اور علیٰ ہذا اقیاس $\text{سن } (۲۶۰^\circ + \bar{A})$

$$= \text{سن } (۲۶۰^\circ + \bar{A}) - \text{ایسے اگر حرف تن صحیح عدد مثبت ہو تو سن } ۱ = \text{سن}$$

$$(۱) \text{ سن } (۳۶۰^\circ + \bar{A}) = \text{سن } (۱ + ۱۸۰^\circ + \bar{A}) \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{ایطرح سے سن } \bar{A} = \text{سن } (۱۸۰^\circ - \bar{A}) \text{ دفعہ } ۲۲ (۱)$$

$$= \text{سن } \{۱۸۰^\circ + (۱۸۰^\circ - \bar{A})\}$$

$$= \text{سن } \{۱۸۰^\circ \times (۱ + ۱) - \bar{A}\}$$

۱۔ ایطرح سے دفعہ ۲۲ کے (۲) و (۴) کی رو سے معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$\text{سن } \bar{A} = \text{سن } \{ (۱ + ۱) \times (۱۸۰^\circ + \bar{A}) \} \dots \dots \dots (۳)$$

سن آ = س - { ۱۸۰° - آ } + ۱۸۰° (۴)

۲۵- دفعہ ۲۳ کی رو سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ

کوس آ = کوس (۱۸۰° + آ) یا = - کوس { ۱۸۰° - آ }

یا = - کوس { (۱۸۰° + آ) } یا = کوس (۱۸۰° - آ)

اور ٹان آ = ٹان (۱۸۰° + آ) یا = - ٹان { ۱۸۰° - آ }

یا = ٹان { (۱۸۰° + آ) } یا = - ٹان (۱۸۰° - آ)

اس طرح سے یہ بھی ثبوت ہو سکتا ہے کہ

سک آ = سک (۱۸۰° + آ) یا = - سک { ۱۸۰° - آ }

یا = - سک { (۱۸۰° + آ) } یا = سک (۱۸۰° - آ) *

* دفعہ ۲۲ سے لیکر ہر تک جہاں درمیان سن آ کوس آ و مان آ وغیرہ اور

سن م ± ۱۸۰° کے ثابت ہونے ہیں فہرے زاویہ آ کے کسی مقدار کی نسبتین

بعض حوالہ کسی اور دفعہ کے ثابت ہو سکتے ہیں۔

مثلاً (شکل شعلق دفعہ ۲۲ کو دیکھو)

اگر ایک خط آب اپنی جگہ معینہ سے گھوم کر دوسری حالت آج میں آوی تو اس

گردش سے زاویہ بنتے ہیں فہرے ض کر کہ راویہ ب ا ج اکا آب خط ابتدا

اور آج خط انتہائی ہے تب یہ ظاہر ہے کہ

(۱) ساین اور زاویوں کے جنکے خطوط ابتدائی و انتہائی خط اب کے ایک ہی جانب واقع ہیں متحد العلامت ہونگے۔

(۲) کو ساین اور زاویوں کے جنکے خطوط ابتدائی و انتہائی دائرہ کے ایک ہی جانب واقع ہوں متحد العلامت ہونگے۔

(۳) ٹانجنت اور زاویوں کے جنکے خطوط ابتدائی و انتہائی ایک ہے ربعہ دائرہ میں یا محاذی ربعہ دائرہ میں واقع ہوں متحد العلامت ہونگے۔

اب اگر آ اور $۲ن$ $۱۸۰^\circ \times$ آ (جہاں $ن$ صحیح عدد مثبت یا منفی ہو) کے خط ابتدائی و انتہائی ایک ہی مقام میں ہیں اور ایسے آ $۲ن$ $۱۸۰^\circ \times$ آ کے ساین وغیرہ ایک ہی ہیں۔

اور خطیہ ابتدائی و انتہائی $(۱+۲ن) ۱۸۰^\circ$ آ کے زاویہ کے خطوط ابتدائی و انتہائی کی بڑائی ہوئی ہے ہیں اور ایسے واقع ہونگے محاذی ربعہ دائرہ میں اور ب ابے دائرہ خطوط کے اس جانب میں جو محاذی ہے اس کے جبین زاویہ آ کے خطوط ابتدائی و انتہائی واقع ہیں اور ایسے متعاویہ سن و کوس وغیرہ کے وہی رہیں گے۔

$$س \{ (۱+۲ن) ۱۸۰^\circ \times آ \} = - سن آ \quad کوس \{ (۱+۲ن) ۱۸۰^\circ \times آ \} = - کوس آ$$

$$\text{ٹان} = \{ (۱۲ + ۱۸۰ \times \text{آ}) \}$$

آ اور - آ کی خطوط ابتدائی و انتہائی واقع ہونگی اور متصل کے ربوع و ایرون میں جو دائروں کے ایک ہی جانب میں ہیں لیکن ب اب کی جانب محاذی میں ہیں ان کو سن (- آ) = سن آ

$$\text{کوس (- آ)} = \text{کوس آ ٹان (- آ)} = - \text{ٹان آ}$$

اور (- آ) اور ۱۲ + ۱۸۰ - آ کی خطوط ابتدائی و انتہائی ایک ہی ہونگے اور اس لیے

$$\text{سن (- آ)} = \text{سن آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس آ کوس آ کوس (- آ)}$$

= - ٹان آ مجموعہ نتائج متذکرہ بالا یہ ہے۔

$$\text{سن آ} = \text{سن (- آ)} = \text{سن آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس آ کوس آ کوس (- آ)}$$

$$\text{کوس آ} = \text{کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس آ کوس آ کوس (- آ)}$$

$$\text{ٹان (- آ)} = \text{ٹان آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس آ کوس (- آ)} = \text{کوس آ کوس آ کوس آ کوس آ کوس (- آ)}$$

۶۶۔ دفعات ۱۶، ۲۲ و ۲۳ کی تفسیر مکتبہ ہے۔

$$\text{کوس آ} = \text{سن (- آ)}$$

$$\text{سن آ} = \text{کوس (- آ)}$$

$$\text{کوس آ} = \text{کوس (- آ)}$$

$$\text{سن آ} = \text{سن (- آ)}$$

$$\text{کوس آ} = \text{کوس (- آ)}$$

$$\text{ٹان آ} = \text{کوس (- آ)}$$

ٹان آ = ٹان و ۱۸۰-آ) سک آ = سک (۱۸۰-آ)

یعنی

ساین کسی زاویہ کا = اوس زاویہ کی متمم کی کو ساین کے

یا = ساین ضمیمہ زاویہ مذکور کے

کو ساین کسی زاویہ کا = ساین متمم اوس زاویہ کے

یا = کو ساین ضمیمہ اوس زاویہ کے

ٹانجٹ کسی زاویہ کا = اوس زاویہ کے متمم کی کو ٹانجٹ کے

یا = اوسکی ضمیمہ کے ٹانجٹ کے یا اوسکی ضمیمہ کے۔ ٹانجٹ

سیکنٹ کسی زاویہ کا = اوس زاویہ متمم کے کو سیکنٹ کے

یا = اوسکی متمم ضمیمہ کے۔ سیکنٹ کے

تنبیہ تناسبات ساین کو ساین و ٹانجٹ و سیکنٹ کے

تنبیہ کسی زاویہ کے ساین و کو ساین و غیرہ اور اوس زاویہ کے متمم کے ساین و کو ساین

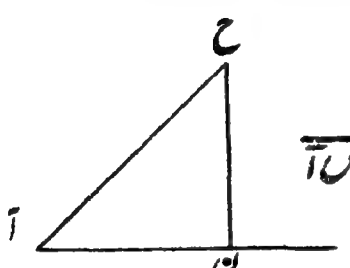
و غیرہ ون کے درمیان جو تناسب ہر وہ اکثر سوالون کے حل کرنے میں کام

آتے ہیں اور اس کتاب میں بھی متعل ہونگے۔

قواعد مفضلہ ذیل اکثر اس کتاب میں مفید ہونگے

$$\begin{aligned} \text{س} - \text{آ} &= \text{کوس} \cdot \text{د} \cdot \text{ق} - \text{آ} = \{ \text{آ} - \text{ق} - \text{د} \cdot \text{ق} \} = - \text{کوس} \cdot \text{د} \cdot \text{ق} + \text{آ} \\ \text{کوس} \cdot \text{آ} &= \text{س} \cdot \text{د} \cdot \text{ق} - \text{آ} = \{ \text{آ} - \text{ق} - \text{د} \cdot \text{ق} \} = \text{س} \cdot \text{د} \cdot \text{ق} - \text{آ} \end{aligned}$$

۲۴ قواعد مفصلہ ذیل کا بزرگان کرنا نہایت ضروری ہے

$$\begin{aligned} \text{دام} \cdot \text{مان} \cdot \text{آ} &= \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \text{س} \cdot \text{ا} \\ \text{کوس} \cdot \text{آ} &= \frac{\text{ان}}{\text{اج}} \end{aligned}$$


$$(۲) \text{ سک} \cdot \text{آ} = \frac{\text{ان}}{\text{اج}} - \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \text{کوس} \cdot \text{آ} \quad \therefore \text{سک} \cdot \text{آ} = \text{کوس} \cdot \text{آ}$$

$$(۳) \text{ کوٹ} \cdot \text{آ} = \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \text{کوس} \cdot \text{آ}$$

$$(۴) \text{ کوٹ} \cdot \text{آ} = \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \text{مان} \cdot \text{آ} \quad \therefore \text{کوٹ} \cdot \text{آ} = \text{مان} \cdot \text{آ}$$

$$(۵) \text{ کو سک} \cdot \text{آ} = \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \text{س} \cdot \text{آ} \quad \therefore \text{کو سک} \cdot \text{آ} = \text{س} \cdot \text{آ}$$

$$(۶) \text{ اج} = \text{ان} + \text{ان} \cdot \text{ا} = ۱ \quad \therefore \left(\frac{\text{ان}}{\text{اج}} \right) + \left(\frac{\text{ان}}{\text{اج}} \right) = ۱$$

$$\text{یا } \text{آ} = \text{دس} \cdot \text{ا} + \text{دکوس} \cdot \text{آ} \quad \therefore \text{س} \cdot \text{آ} = \text{دس} \cdot \text{ا} + \text{دکوس} \cdot \text{آ}$$

$$\text{اور کوس} \cdot \text{آ} = \text{دس} \cdot \text{ا} + \text{دکوس} \cdot \text{آ}$$

$$(۷) \text{ آج} = \text{آن} + \text{ن ج}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{آج}}{\text{آن}} \right) = ۱ + \left(\frac{\text{ن ج}}{\text{آن}} \right) \text{ ایک آ} = ۱ + \text{مان آ}$$

$$\therefore \text{سک آ} = \text{ما (۱ + مان آ)} \text{ اور مان آ} = \text{ما (سک آ - ۱)}$$

$$(۸) \text{ آج} = \text{آن} + \text{ن ج}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{آج}}{\text{آن}} \right) = \left(\frac{\text{ن ج}}{\text{آن}} \right) + \text{ایک کو سک آ} = \text{کوٹ مان آ} + ۱$$

$$\therefore \text{کو سک آ} = \text{ما (۱ + کوٹ آ)} \text{ اور کوٹ آ} = \text{ما (کو سک آ - ۱)}$$

۲۸۔ اول قواعد کی رو سے جو نفعہ (۲۷) میں ثابت ہوئے ہیں کسی ایک تناسب

(منہ رجبہ دفعہ ۱۵) کی مقدار بنام کسی دوسرے تناسب کے ظاہر کئی جاسکتی ہے مثلاً

$$(۱) \text{ مان آ} = \frac{\text{س آ}}{\text{ما (س آ - ۱)}} \text{ کیونکہ موجب نفعہ (۲۷) مان آ} = \frac{\text{س آ}}{\text{کو س آ}} = \frac{\text{س آ}}{\text{ما (س آ - ۱)}}$$

$$(۲) \text{ مان آ} = \frac{\text{س آ}}{\text{کو س آ}} = \frac{\text{ما (س آ - ۱)}}{\text{کو س آ}}$$

$$(۳) \text{ س آ} = \frac{\text{س آ}}{\text{کو س آ}} \times \text{کو س آ} = \text{مان آ} \times \text{سک آ} = \frac{\text{مان آ}}{\text{ما (مان آ + ۱)}}$$

۲۹۔ کسی مرکب کو جزوں میں کر سنے کی واسطے قواعد متعلق و نفعہ ۲۸ مفید ہونگے اسی

قسم کی اور سوالوں میں وہی طریقہ موت کا لائق استعمال ہے مثلاً ایک راوی

کی کو سائین کو بنام اوسکے کو سیکنٹ کی اور کو سیکنٹ کو بنام ور سڈین

کے ظاہر کرتا ہے۔

بڑا ہے کج سے

∴ $\frac{ان}{اج} = \frac{بڑا ہے کج سے}{اج}$ سے یعنی کوس آن سن آتے اسے اسے ثابت ہو سکتا ہے

کہ کوساین اون زاویوں کا جو ۹۰° اور ۹۰° کی درمیان ہیں اونکی ساین ہوتے ہوتی ہیں

۳۲- ۳۰ و ۹۰° کے زاویوں کا ساین کوساین ڈیباخت دریافت کرو۔

(۱) بموجب شکل دفعہ ۲۴ کے فرض کرو کہ زاویہ ن ج = ۹۰° ∴ زاویہ ن ج = ۹۰°

۹۰° - ۹۰° = ۰°

∴ $\frac{ان}{اج} = \frac{ن ج}{اج} = \frac{ن ج}{اج}$ یعنی ساین ۹۰° = کوس ۹۰°

∴ $\frac{ان}{اج} = \frac{ن ج}{اج} = \frac{ن ج}{اج}$ اور $\frac{ان}{اج} = \frac{ن ج}{اج}$ ∴ سن ۹۰° = $\frac{ان}{اج} = \frac{ن ج}{اج}$ اور

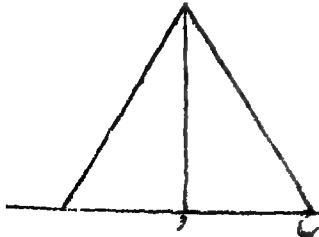
کوس ۹۰° = $\frac{ان}{اج} = \frac{ن ج}{اج} = ۱$

(۲) فرض کرو کہ اب ج ثلث متساوی الاضلاع ہے اسلئے اوکے سب زاویہ

ایک دوسرے کے برابر ہیں اور اسلئے اوکا ہر زاویہ دو قانون کا ایک ثلث

ہے یعنی ۹۰° ہو گئی ہے۔

نتیجہ اسے ج ب پر آدھو دگراؤ ∴ ب = و ج = $\frac{ب ج}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج}$ اب



اور زاویہ ب = زاویہ ج = ۹۰°

∴ $\frac{ب ج}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج}$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{2} = \{30^\circ - 1\}\sqrt{2} = 30^\circ$$

$$\frac{1^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 30^\circ$$

$$(۳۱) \text{ سن } ۶۰ = \text{ کوس } (۶۰ - ۶۰) = \text{ کوس } ۰ = ۰ = \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{1}{p} = \text{کوس } 90^\circ = \text{سن } (90^\circ - 90^\circ) = \text{سن } 0^\circ = 0$$

$$\sqrt{3} = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \tan 40^\circ$$

م م م - منفصلہ ذیل کے ایسی مساوات اکثر دفعہ ۴ کے قاعدوں سے حل ہو سکتی ہیں

تمثیلی اول

سن آ + ہ کو سن آ = ۴۳ اس مساوات ہے سن آ کی مقدار نکالو

چونکہ $\cos A = \frac{1}{2}$ - س A

∴ سن آ + ہ (سن آ) = ۳ ∴ ۴ سن آ = ۲ اور سن آ = $\frac{1}{2}$

تمثيل ووم

س آ = م × سن ب اور ن آ = ن × چٹان ب ان مساواتوں سے سن آ و

کوس ب کے مقدار کا دس گنا کی عوض میں لا اور کوس ب کی عوض میں دس گنا

$$\therefore \text{سن پ} = \sqrt{16-1} = 3$$

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin 90^\circ} = \sin A$$

$$(۳۰) \quad \frac{17-13}{5} = \frac{17-13}{5} = \frac{17-13}{5}$$

ایسے اصلی مساواتوں کی شکل یوں ہوتے ہیں

$$0 = م \times 17 - 13 \text{ اور } \frac{17}{17-13} = \frac{17}{4} = ن \times \frac{17-13}{4}$$

$$\text{پس } 17 = سن آ = \frac{17-13}{4} = \frac{4}{4} \text{ اور } 17 = کوس ب = \frac{17-13}{4} = \frac{4}{4}$$

تشکیل سوم

$$\left\{ \begin{array}{l} م = کوسک آ - سن آ \\ ن = سک آ - کوس ا \end{array} \right\} \text{ ان مساوات سے ایسی مساوات نکالو جن میں صرف } م \text{ اور } ن \text{ ہو مگر زاویہ آ نہ آوے}$$

$$\text{مساوات اول سے } م = \frac{کوسک آ - سن آ}{17-13} \text{ اور دوم سے } ن = \frac{سک آ - کوس ا}{17-13}$$

$$\therefore \frac{م}{ن} = \frac{کوسک آ - سن آ}{سک آ - کوس ا} = \frac{17-13}{17-13} = 1$$

$$\text{اور } م = \frac{کوسک آ - سن آ}{17-13} = \frac{کوسک آ - سن آ}{17-13} = \frac{کوسک آ - سن آ}{17-13}$$

$$\therefore م \times 17 - 13 = (17-13) = 4 \text{ لیکن } 17-13 = 4 \text{ لیکن } 17-13 = 4$$

$$\therefore م \times 17 - 13 = (17-13) = 4$$

باب تیسرا

بیان قاعدہ جات تناسب مسلح الزاویہ خمین ایک

سے زیادہ زاویوں کا ذکر ہے

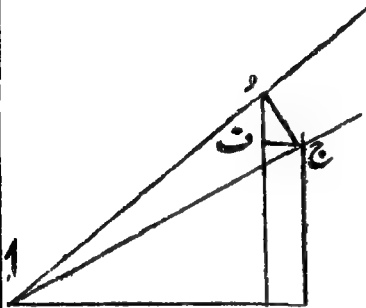
۱۴- اگر دو زاویوں کے سین کو سین دی ہوئی ہوں تو انکی جمع یا

تفریق کے سین کو سین کے کھائے کا طریقہ

فرض کرو کہ ب اوج اور ج او وزا رفتے ہیں

جنکی عمود پر زاویہ او ب مستقیم ہوئے ہیں آدکی

نقطہ او سے اب راجہ پر او ب و ج عمود گراواؤ



نقطہ ج سے اب و او ب پر ج ی د ج ف عمود گراؤ تو ف ی مستقیم ہے

ف ب = ج ی اور ف ج = ب ی

> ج دین = ۹۰° - ج د ج ف = ج ف ج آ

= آ م کیونکہ ف ج آ می کا متوازی ہے

$$\frac{\text{اب سن}}{\text{او}} + \frac{\text{ج آ ج}}{\text{او}} = \frac{\text{ب سن} + \text{ج آ}}{\text{او}} = \frac{\text{آ}}{\text{او}} = (\text{ب} + \text{ج})$$

$$= \frac{\text{ج ی}}{\text{ج}} \times \frac{\text{ف د}}{\text{د ج}} + \frac{\text{ب ی}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ج آ}}{\text{آ ج}} =$$

$$= \text{سن آ} \times \text{کوس ب} + \text{کوس آ} \times \text{سن ب} \dots \dots (۱)$$

$$\frac{\text{ف ج}}{\text{او}} - \frac{\text{ای}}{\text{او}} = \frac{\text{ای-ج ب}}{\text{او}} = \frac{\text{آ ب}}{\text{او}} = (\text{ب} - \text{ج})$$

$$= \frac{\text{ای}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ج آ}}{\text{آ ج}} - \frac{\text{ج ی}}{\text{ج}} \times \frac{\text{ف د}}{\text{د ج}} =$$

$$= \text{کوس آ} \times \text{کوس ب} - \text{سن آ} \times \text{سن ب} \dots \dots (۲)$$

فیض کرو کہ زاویہ ب ا ج = آ اور زاویہ ج ا د = ب
 ا د کی نقطہ د سے آ ب و آ ج پر د ب و د ج عمود گراوا اور نقطہ ج سے آ ب پر
 ج ی عمود گراوا اور نقطہ د سے ج ی پر د ج عمود گراوا ایسے ف ب مستطیل ہے
 ف ب می = د ب اور ف د = ج ی زاویہ د ج ف = ۹۰ زاویہ آ ج ی = آ

$$\text{ساین (ا-ب)} = \frac{ب}{ا د} = \frac{ج-ج}{ا د} = \frac{ج-ج}{ا د} - \frac{ج}{ا د} = \frac{ج ف}{ا د}$$

$$= \frac{ج}{ا ج} \times \frac{آ ج}{ا د} - \frac{ج ف}{ا د} \times \frac{ج د}{ا د}$$

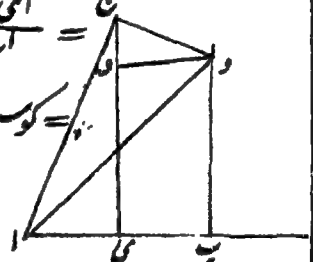
$$= \text{سن ا} \times \text{کوس ب} - \text{کوس آ} \times \text{سن ب} \dots\dots\dots (۳)$$

$$\text{اور کوس (آ-ب)} = \frac{آ ب}{ا د} = \frac{ای+ج ب}{ا د} = \frac{ای}{ا د} + \frac{ج ب}{ا د}$$

$$= \frac{ای}{ا ج} \times \frac{آ ج}{ا د} + \frac{ج ب}{ا د} \times \frac{ج د}{ا د}$$

$$= \text{کوس آ} \times \text{کوس ب} + \text{سن آ} \times \text{سن ب} \dots\dots\dots (۴)$$

تمثیل



اگر عدد ۹۰ و ۹۰ کے ساین و کوساین دیے ہوئے ہوں تو ۹۰ و ۹۰ ڈگری کے
 ساین و کوساین نکالو۔

$$\text{سن ۹۰} = \text{کوس ۹۰} = \frac{۱}{۱} = \text{سن ۰} = \text{کوس ۰} = \frac{۰}{۱} = \text{سن اور کوس ۹۰} = \frac{۱}{۱} \dots\dots\dots (۵)$$

$$\text{سن ۹۰} = \text{سن (۹۰ + ۹۰)} = \text{سن ۹۰} \times \text{کوس ۹۰} + \text{کوس ۹۰} \times \text{سن ۹۰} = ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱ = ۲$$

$$(1+3^7) \times \frac{1}{3^7 \times 2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3^7} + \frac{3^7}{2} \times -\frac{1}{3^7} =$$

$$\text{اسی طرح سے کہ } 3^0 = 1 = \text{کوس } (3^0 + 3^0) \times \frac{1}{3^0 \times 2} = (1 - 3^7) \times \frac{1}{3^7 \times 2}$$

$$3^1 = 3 = \text{سین } (3^1 - 3^0) \times \frac{1}{3^1 \times 2} = (1 - 3^7) \times \frac{1}{3^7 \times 2}$$

$$\text{کوس } 3^1 = 3 = \text{کوس } (3^1 - 3^0) \times \frac{1}{3^1 \times 2} = (1 + 3^7) \times \frac{1}{3^7 \times 2}$$

۳۵ اشکال محررہ دفعہ ۳۴ میں زاویہ جات آدب ایک قائمی سیم کم تصور ہوتے ہیں اور اونکا مجموعہ بھی علیٰ ہذا التیاس ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے لیکن ان زاویہ جات کے مقادیر چاہے کچھ ہوں اگر اوپر طرح سے شکل کیچی جاوے جب طرح سے دفعہ ۳۴ میں کیچی گئی ہے اور اگر آدب کی سائین و کوسین کی علامتوں پر توجہ کامل مرعی ہوئے تو ہمیشہ یہی نتیجہ نکلے گا مثلاً فرض کرو کہ قاعدہ مفصلہ ذیل کلی ثبوت کرنا و کار ہے بذریعہ شکل مرتسمہ ذیل کہے جہاں جہاں ج = ح = آ دج آو = ب یعنی ہر ایک زاویہ ایک قائمہ سے برابر ہے۔

قواعد یہ ہیں کہ سس ب = س ا کو س ب - کو س آسن ب

اؤ کے کسی نقطہ دسویں ابرہائی ہوئی پر دن عمود گراؤ خط آب پینچی ف عمود گراؤ اور د ف کو آب کی متوازی کیچو اور آب پر د ب عمود گراؤ اسلئے ف ب متطیل ہے اور ف = و ب ب س (آ - ب) = ب د = ف آ = ج ف - ج ما

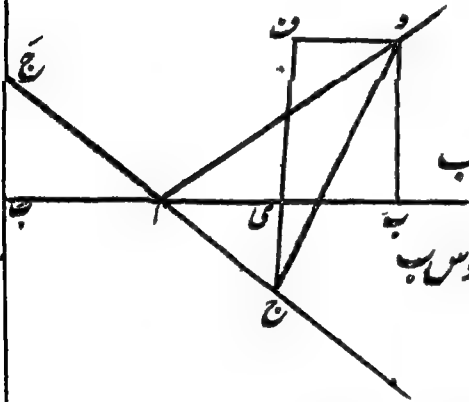
$$\frac{\text{ج د}}{\text{ج ف}} + \frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}} - \frac{\text{ج ی}}{\text{ج ا}} + \frac{\text{ج ا}}{\text{ا د}} =$$

$$= \text{کوس فنج د} \times \text{سن دلج} - \text{سن ج اسی} \times \text{کوس دلج}$$

لیکن کوس فنج د = کوس ی ا ج = - کوس (۱۸۰ - ج ا ب) بموجب دفعہ ۲۶

$$= - \text{کوس ج ا ب} = - \text{کوس آ}$$

$$\text{سن دلج} = \text{س (۱۸۰ - دلج)} \text{ بموجب دفعہ ۲۶} = \text{سن ج آ د} = \text{سن ب}$$



$$\text{سن ج اسی} = \text{سن ج ا ب} = \text{سن آ}$$

$$\text{کوس دلج} = - \text{کوس (۱۸۰ - دلج)} = - \text{کوس ب}$$

$$\text{سن د ا ب} = - \text{کوس ا ب س} + \text{س د کوس ب}$$

$$= \text{س آ کوس ب} - \text{کوس آ س ب}$$

$$= \text{۳۶} - \text{اگر دفعہ ۳۶ کے قاعدوں کے کوئی قاعدہ مثلاً سن س (ب + د) =}$$

سن ا کوس ب + کوس ا س ب دیا ہوا ہوا باقی قاعدے اوس سے نقل سکتے ہیں

کیونکہ اگر ب (ب - ب) ہو جاوے۔ تب

$$\text{سن د ا ب} = \text{س [آ + د ب م]} = \text{سن آ کوس (ب - د) + کوس آ س (ب - د)}$$

لیکن کوس (ب - د) = کوس ب دفعہ (۲۳) اور سن (ب - د) = - سن ب دفعہ (۲۲)

$$\text{سن د ا ب} = \text{س آ کوس ب} - \text{کوس آ س ب}$$

پہر کوس (ب + ۱) = سن { ۹۰ - (۱ + ب) } ۰۰ دفعہ (۱۴)

$$= \text{سن} \{ (۹۰ - ۱) - (ب) \}$$

$$= \text{سن} (۹۰ - ۱) \times \text{کوس} (ب - ۱) + \text{کوس} (۹۰ - ۱) \times \text{سن} (ب - ۱)$$

$$= \text{کوس} آ \times \text{کوس ب} - \text{سن آ} \times \text{سن ب}$$

اسی طرح جسے کوس (ب - ۱) = کوس آ × کوس ب + سن آ × سن ب ثبوت ہو سکتا ہے

۴۰۷ - تین یا زیادہ زاویوں کے مجرہ کے سین اور کوسین کو موجب دفعہ ۴۰۷ کے

ہر ایک زاویہ کے کوسین و سین سے آسانی نکال سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ سین و کوسین زاویہ آ ب ج کا ویسا ہے ان سے سین ۱ + ب ج کا نکالنا چاہیے

$$\text{سن} (۱ + ب ج) = \text{سن} (۱ + ب) \times \text{سن ج} + \text{کوس} (۱ + ب) \times \text{کوس ج}$$

$$= \text{سن آ} \times \text{کوس ب} + \text{کوس آ} \times \text{سن ب}$$

$$= \text{سن آ} \times \text{کوس ب} + \text{کوس آ} \times \text{سن ب}$$

اسی طرح سے سن (۱ + ب ج) = سن آ اور کوس (۱ + ب ج) = کوس آ

کے نکالے جاسکتے ہیں اور یہی قاعدہ کمی زاویوں کے مجموعہ کی نسبت میں مستعمل ہو سکتا ہے

حاصل اگر ۱ + ب ج = ۱ + ب ج ۱۸۰ جہاں آ کوئی صحیح عدد ہے تو کوس

(۱ + ب ج) = ۱۸۰ جہاں آ کوئی صحیح عدد ہے تو کوس (۱ + ب ج) = ۱۸۰ جہاں آ کوئی صحیح عدد ہے تو کوس

سن ۱۰ سن ب + سن ج = سن ۱۱ کو س ب x کو س ج + سن ب کو س ۱۰ کو س ج + سن ج کو س ۱۰ کو س ب
اگر ن = تو ا = بیج = ۱۸۰ اور ایسے یہ مساوات کسی مثلث المسطح کی زاویوں کے ساین
کو ساین کو خطا ہر کرتا ہے۔

۳۸۔ ثبات کر کہ سن ۱۲ = سن آ x کو س آ

سن ۱۰ + سن ب = سن ۱۱ کو س ب + سن ب کو س ۱۰ اور اگر ب کے عوض میں آ لکھا جا رہے تو مساوات
مذکورہ کی صورت یوں ہو گے

سن ۱۲ = سن آ x کو س آ + کو س آ x سن آ = سن آ x کو س آ

۳۹۔ اس بات کی دریافت درکار ہے کہ کو س ۱۲ = کو س آ - سن آ (۱)

اور کو س ۱۲ = کو س آ - ۱ (۲)

اور کو س ۱۲ = ۱ - سن آ (۳)

(۱) کو س (۱ + ب) = کو س آ کو س ب - سن آ کو س ب اور اگر ب کے عوض میں آ لکھیں

کو س ۱۲ = کو س ب کو س آ - سن آ کو س آ - سن آ

کو س آ = کو س آ - سن آ اور ۱ = کو س آ + سن آ

$$۱: ۱ + \text{کوس } ۱۲ = ۲ \text{ کوس } ۱ \text{ اور } ۱ - \text{کوس } ۱۲ = ۲ \text{ کوس } ۱$$

$$(۲) \text{ ایلے کوس } ۱۲ = ۲ \text{ کوس } ۱ - ۱$$

$$(۳) \text{ اور کوس } ۱ = ۱ - ۲ \text{ سن } ۱۲$$

$$\left. \begin{aligned} \text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱ = \pm \sqrt{۱ + \text{سن } ۱۲} \\ \text{کوس } ۱ - \text{سن } ۱ = \pm \sqrt{۱ - \text{سن } ۱۲} \end{aligned} \right\} \text{ اسکا ثبوت کرنا درکار ہے } \quad \text{م}$$

$$\text{چونکہ سن } ۱۲ = ۲ \text{ سن } ۱ \times \text{کوس } ۱ \text{ اور } ۱ = \text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱$$

∴ جمع و تفریق کرنے سے

$$۱ + \text{ساین } ۱۲ = \text{کوس } ۱ + ۲ \text{ ساین } ۱ \times \text{کوس } ۱ + \text{ساین } ۱۲$$

$$۱ - \text{ساین } ۱۲ = \text{کوس } ۱ - ۲ \text{ ساین } ۱ \times \text{کوس } ۱ + \text{ساین } ۱۲$$

$$\therefore \text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱ = \pm \sqrt{۱ + \text{سن } ۱۲}$$

$$\text{اور کوس } ۱ - \text{سن } ۱ = \pm \sqrt{۱ - \text{سن } ۱۲}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{کوس } ۱ = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{۱ + \text{سن } ۱۲} + \sqrt{۱ - \text{سن } ۱۲} \right\} \\ \text{سن } ۱ = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{۱ + \text{سن } ۱۲} - \sqrt{۱ - \text{سن } ۱۲} \right\} \end{aligned} \right\} \text{ اگر آہم ڈگری سے کم ہو تو}$$

بموجب دفعہ ۱۱ کے اگر آچھٹا ہو آہم ڈگری سے تو کوس آہم سن آ اور وی دونوں

مثبت ہیں۔

منفعی ہے اوس سے چوٹا ہے ایسے دفعہ ۴۴ کے مساوات یوں ہونگے۔

$$\text{کوس 1 + سن 1} = \text{1} - \text{1} + \text{سن 1} \text{ اور کوس 1 - سن 1} = \text{1} + \text{1} - \text{سن 1} \text{ (1 - سن 1)}$$

۳۴- اگر دو زاویوں کے مابینٹ معلوم ہوں تو اداں زاویوں کے جمع یا تفریق کو مابینٹ نکالوں

مثال (۱+ب) = کوس (۱+ب) = $\frac{\text{کوس } 1 \times \text{کوس } ب + \text{کوس } ب \times \text{کوس } 1}{\text{کوس } 1 \times \text{کوس } ب + \text{کوس } ب \times \text{کوس } 1}$ اور اگر نسب نما اور
 شہ کو کوس کو کوس ب سے تقسیم کریں تو ثمار (۱+ب) = $\frac{\text{کوس } 1 - \text{کوس } ب}{\text{کوس } 1 \times \text{کوس } ب + \text{کوس } ب \times \text{کوس } 1}$

$$= \frac{\text{نمان} + 1 \text{ نمان ب}}{1 - \text{نمان} + \text{نمان ب}} \text{ اور اسے طرح سے نمان (1-ب) } \frac{\text{نمان} - 1 \text{ نمان ب}}{\text{نمان} + \text{نمان ب}}$$

ماہل اول اگر ب = ۱ تومان = $\frac{۲ \text{ تومان}}{۱ \text{ تومان}}$

حاصل دوم اگر ب = م اور زمان م = ۱ : زمان ک = م = $\frac{\text{زمان ک}}{۱ - \text{میان ک}}$ (۱)

$$(2) \dots \frac{\text{سینہ کوں ۱} - \text{کوس ۱ سینہ}}{\text{سینہ کوں ۱} - \text{کوس ۱ سینہ}} = \frac{1 + \frac{\text{سینہ}}{\text{کوس}}}{1 - \frac{\text{سینہ}}{\text{کوس}}}$$

حاصل شوم اس طرح سے ٹانہ (م) = $\frac{\text{ٹانہ} - 1}{\text{ٹانہ} + 1} \dots \dots \dots (3)$

$$= \frac{\text{سن 1 کو سن 1} \dots \dots \dots (۴۲)}{\text{سن 1 کو سن 1}}$$

$$\frac{\text{شان ۱} - ۱}{\text{شان ۱} + ۱} + \frac{\text{شان ۱} + ۱}{\text{شان ۱} - ۱} = (\text{شان ۱} - ۱)$$

$$= \frac{2 \text{ مان } 1}{1 - 2 \text{ مان } 1} = 2 \text{ مان } 1 \dots (5) \text{ بموجب اصل}$$

اگر ۱۰۴ سے چوٹا ہو تو چونکہ $۱۰۴ - ۱ = ۱۰۳$ ، $۱۰۳ - ۱ = ۱۰۲$ ، $۱۰۲ - ۱ = ۱۰۱$ ، $۱۰۱ - ۱ = ۱۰۰$ ، $۱۰۰ - ۱ = ۹۹$ ، $۹۹ - ۱ = ۹۸$ ، $۹۸ - ۱ = ۹۷$ ، $۹۷ - ۱ = ۹۶$ ، $۹۶ - ۱ = ۹۵$ ، $۹۵ - ۱ = ۹۴$ ، $۹۴ - ۱ = ۹۳$ ، $۹۳ - ۱ = ۹۲$ ، $۹۲ - ۱ = ۹۱$ ، $۹۱ - ۱ = ۹۰$ ، $۹۰ - ۱ = ۸۹$ ، $۸۹ - ۱ = ۸۸$ ، $۸۸ - ۱ = ۸۷$ ، $۸۷ - ۱ = ۸۶$ ، $۸۶ - ۱ = ۸۵$ ، $۸۵ - ۱ = ۸۴$ ، $۸۴ - ۱ = ۸۳$ ، $۸۳ - ۱ = ۸۲$ ، $۸۲ - ۱ = ۸۱$ ، $۸۱ - ۱ = ۸۰$ ، $۸۰ - ۱ = ۷۹$ ، $۷۹ - ۱ = ۷۸$ ، $۷۸ - ۱ = ۷۷$ ، $۷۷ - ۱ = ۷۶$ ، $۷۶ - ۱ = ۷۵$ ، $۷۵ - ۱ = ۷۴$ ، $۷۴ - ۱ = ۷۳$ ، $۷۳ - ۱ = ۷۲$ ، $۷۲ - ۱ = ۷۱$ ، $۷۱ - ۱ = ۷۰$ ، $۷۰ - ۱ = ۶۹$ ، $۶۹ - ۱ = ۶۸$ ، $۶۸ - ۱ = ۶۷$ ، $۶۷ - ۱ = ۶۶$ ، $۶۶ - ۱ = ۶۵$ ، $۶۵ - ۱ = ۶۴$ ، $۶۴ - ۱ = ۶۳$ ، $۶۳ - ۱ = ۶۲$ ، $۶۲ - ۱ = ۶۱$ ، $۶۱ - ۱ = ۶۰$ ، $۶۰ - ۱ = ۵۹$ ، $۵۹ - ۱ = ۵۸$ ، $۵۸ - ۱ = ۵۷$ ، $۵۷ - ۱ = ۵۶$ ، $۵۶ - ۱ = ۵۵$ ، $۵۵ - ۱ = ۵۴$ ، $۵۴ - ۱ = ۵۳$ ، $۵۳ - ۱ = ۵۲$ ، $۵۲ - ۱ = ۵۱$ ، $۵۱ - ۱ = ۵۰$ ، $۵۰ - ۱ = ۴۹$ ، $۴۹ - ۱ = ۴۸$ ، $۴۸ - ۱ = ۴۷$ ، $۴۷ - ۱ = ۴۶$ ، $۴۶ - ۱ = ۴۵$ ، $۴۵ - ۱ = ۴۴$ ، $۴۴ - ۱ = ۴۳$ ، $۴۳ - ۱ = ۴۲$ ، $۴۲ - ۱ = ۴۱$ ، $۴۱ - ۱ = ۴۰$ ، $۴۰ - ۱ = ۳۹$ ، $۳۹ - ۱ = ۳۸$ ، $۳۸ - ۱ = ۳۷$ ، $۳۷ - ۱ = ۳۶$ ، $۳۶ - ۱ = ۳۵$ ، $۳۵ - ۱ = ۳۴$ ، $۳۴ - ۱ = ۳۳$ ، $۳۳ - ۱ = ۳۲$ ، $۳۲ - ۱ = ۳۱$ ، $۳۱ - ۱ = ۳۰$ ، $۳۰ - ۱ = ۲۹$ ، $۲۹ - ۱ = ۲۸$ ، $۲۸ - ۱ = ۲۷$ ، $۲۷ - ۱ = ۲۶$ ، $۲۶ - ۱ = ۲۵$ ، $۲۵ - ۱ = ۲۴$ ، $۲۴ - ۱ = ۲۳$ ، $۲۳ - ۱ = ۲۲$ ، $۲۲ - ۱ = ۲۱$ ، $۲۱ - ۱ = ۲۰$ ، $۲۰ - ۱ = ۱۹$ ، $۱۹ - ۱ = ۱۸$ ، $۱۸ - ۱ = ۱۷$ ، $۱۷ - ۱ = ۱۶$ ، $۱۶ - ۱ = ۱۵$ ، $۱۵ - ۱ = ۱۴$ ، $۱۴ - ۱ = ۱۳$ ، $۱۳ - ۱ = ۱۲$ ، $۱۲ - ۱ = ۱۱$ ، $۱۱ - ۱ = ۱۰$ ، $۱۰ - ۱ = ۹$ ، $۹ - ۱ = ۸$ ، $۸ - ۱ = ۷$ ، $۷ - ۱ = ۶$ ، $۶ - ۱ = ۵$ ، $۵ - ۱ = ۴$ ، $۴ - ۱ = ۳$ ، $۳ - ۱ = ۲$ ، $۲ - ۱ = ۱$ ، $۱ - ۱ = ۰$ ، $۰ - ۱ = -۱$ ، $-۱ - ۱ = -۲$ ، $-۲ - ۱ = -۳$ ، $-۳ - ۱ = -۴$ ، $-۴ - ۱ = -۵$ ، $-۵ - ۱ = -۶$ ، $-۶ - ۱ = -۷$ ، $-۷ - ۱ = -۸$ ، $-۸ - ۱ = -۹$ ، $-۹ - ۱ = -۱۰$ ، $-۱۰ - ۱ = -۱۱$ ، $-۱۱ - ۱ = -۱۲$ ، $-۱۲ - ۱ = -۱۳$ ، $-۱۳ - ۱ = -۱۴$ ، $-۱۴ - ۱ = -۱۵$ ، $-۱۵ - ۱ = -۱۶$ ، $-۱۶ - ۱ = -۱۷$ ، $-۱۷ - ۱ = -۱۸$ ، $-۱۸ - ۱ = -۱۹$ ، $-۱۹ - ۱ = -۲۰$ ، $-۲۰ - ۱ = -۲۱$ ، $-۲۱ - ۱ = -۲۲$ ، $-۲۲ - ۱ = -۲۳$ ، $-۲۳ - ۱ = -۲۴$ ، $-۲۴ - ۱ = -۲۵$ ، $-۲۵ - ۱ = -۲۶$ ، $-۲۶ - ۱ = -۲۷$ ، $-۲۷ - ۱ = -۲۸$ ، $-۲۸ - ۱ = -۲۹$ ، $-۲۹ - ۱ = -۳۰$ ، $-۳۰ - ۱ = -۳۱$ ، $-۳۱ - ۱ = -۳۲$ ، $-۳۲ - ۱ = -۳۳$ ، $-۳۳ - ۱ = -۳۴$ ، $-۳۴ - ۱ = -۳۵$ ، $-۳۵ - ۱ = -۳۶$ ، $-۳۶ - ۱ = -۳۷$ ، $-۳۷ - ۱ = -۳۸$ ، $-۳۸ - ۱ = -۳۹$ ، $-۳۹ - ۱ = -۴۰$ ، $-۴۰ - ۱ = -۴۱$ ، $-۴۱ - ۱ = -۴۲$ ، $-۴۲ - ۱ = -۴۳$ ، $-۴۳ - ۱ = -۴۴$ ، $-۴۴ - ۱ = -۴۵$ ، $-۴۵ - ۱ = -۴۶$ ، $-۴۶ - ۱ = -۴۷$ ، $-۴۷ - ۱ = -۴۸$ ، $-۴۸ - ۱ = -۴۹$ ، $-۴۹ - ۱ = -۵۰$ ، $-۵۰ - ۱ = -۵۱$ ، $-۵۱ - ۱ = -۵۲$ ، $-۵۲ - ۱ = -۵۳$ ، $-۵۳ - ۱ = -۵۴$ ، $-۵۴ - ۱ = -۵۵$ ، $-۵۵ - ۱ = -۵۶$ ، $-۵۶ - ۱ = -۵۷$ ، $-۵۷ - ۱ = -۵۸$ ، $-۵۸ - ۱ = -۵۹$ ، $-۵۹ - ۱ = -۶۰$ ، $-۶۰ - ۱ = -۶۱$ ، $-۶۱ - ۱ = -۶۲$ ، $-۶۲ - ۱ = -۶۳$ ، $-۶۳ - ۱ = -۶۴$ ، $-۶۴ - ۱ = -۶۵$ ، $-۶۵ - ۱ = -۶۶$ ، $-۶۶ - ۱ = -۶۷$ ، $-۶۷ - ۱ = -۶۸$ ، $-۶۸ - ۱ = -۶۹$ ، $-۶۹ - ۱ = -۷۰$ ، $-۷۰ - ۱ = -۷۱$ ، $-۷۱ - ۱ = -۷۲$ ، $-۷۲ - ۱ = -۷۳$ ، $-۷۳ - ۱ = -۷۴$ ، $-۷۴ - ۱ = -۷۵$ ، $-۷۵ - ۱ = -۷۶$ ، $-۷۶ - ۱ = -۷۷$ ، $-۷۷ - ۱ = -۷۸$ ، $-۷۸ - ۱ = -۷۹$ ، $-۷۹ - ۱ = -۸۰$ ، $-۸۰ - ۱ = -۸۱$ ، $-۸۱ - ۱ = -۸۲$ ، $-۸۲ - ۱ = -۸۳$ ، $-۸۳ - ۱ = -۸۴$ ، $-۸۴ - ۱ = -۸۵$ ، $-۸۵ - ۱ = -۸۶$ ، $-۸۶ - ۱ = -۸۷$ ، $-۸۷ - ۱ = -۸۸$ ، $-۸۸ - ۱ = -۸۹$ ، $-۸۹ - ۱ = -۹۰$ ، $-۹۰ - ۱ = -۹۱$ ، $-۹۱ - ۱ = -۹۲$ ، $-۹۲ - ۱ = -۹۳</$

ایسے ٹان دہم + دہم - ٹان (دہم - آ) = ٹان ۲۱ ۶۱

$$۴۴ - ثابت کرو کہ \frac{\sin(د + ب)}{\sin(د - ب)} = \frac{\sin(د + ب)}{\sin(د - ب)}$$

$$\therefore \frac{\sin(د + ب)}{\sin(د - ب)} = \frac{\sin د + \sin ب}{\sin د - \sin ب} = \frac{\sin د \cos ب + \cos د \sin ب}{\sin د \cos ب - \cos د \sin ب} = \frac{\sin د \cos ب + \cos د \sin ب}{\sin د \cos ب - \cos د \sin ب}$$

۴۵ - اگر ٹان د ٹان ب ٹان ج معلوم ہو تو ٹان د (د + ب + ج) کو دریافت کرو

$$\frac{\sin(د + ب + ج)}{\sin(د + ب - ج)} = \frac{\sin(د + ب + ج)}{\sin(د + ب - ج)} = \frac{\sin(د + ب + ج)}{\sin(د + ب - ج)}$$

$$\frac{\sin(د + ب + ج)}{\sin(د + ب - ج)} = \frac{\sin(د + ب + ج)}{\sin(د + ب - ج)} = \frac{\sin(د + ب + ج)}{\sin(د + ب - ج)}$$

اسی طرح سے اگر چار یا زیادہ زاویوں کی ٹانجٹ معلوم ہوں تو او ان زاویوں کے مجموعہ کے ٹانجٹ معلوم ہو سکتی ہے۔

حاصل اگر د + ب + ج = ۱۸۰° جسمین ن = صفر یا کسی صحیح عدد کو ٹان د + ب + ج

ایسے ٹان د + ب + ج - ٹان د ٹان ب + ج = ٹان د ٹان ب + ج = ٹان د ٹان ب + ج

ٹان د ٹان ب + ج اور اگر ن = ۰° د + ب + ج = ۱۸۰° اور ایسے مساوی

کسی مثلث السطح کے زاویوں کے ٹانجٹ ظاہر کرتا ہے۔

۴۶ - سن ۲۱ کو سن ۲۱ کو بنام ٹان د کے ظاہر کرو۔

$$\begin{aligned} \text{سن ۱} = ۱ \text{ سن ۲} \times \text{کوس ۱} &= (۳۹) = \frac{۱ \text{ سن ۲}}{\text{کوس ۱}} \times \text{کوس ۱} \\ &= \frac{۱ \text{ سن ۲}}{۱ + \text{ٹان ۱}} = (۲۴) \\ \text{اور کوس ۱} = ۱ \text{ کوس ۲} - ۱ &= (۲۳۹) = \frac{۲}{۱ - \text{ٹان ۱}} \\ &= \frac{۱ - \text{ٹان ۱}}{۱ + \text{ٹان ۱}} = ۱ - \frac{۲}{۱ + \text{ٹان ۱}} \end{aligned}$$

۴۷۔ سن ۱ و کوس ۱ و ٹان ۱۔ کئے متبادر مفصلہ ذیل اکثر متعمل ہیں اور انکا یاد رکھنا بہت ضرور ہے وی جیک ثبوت لکھے نہیں گئے باسانی موافق طرز دفعہ ۴۷ کے ثابت ہو چکا ہے

$$(۱) \text{ سن ۱} = ۱ \text{ کوس ۱} \quad (۱) \text{ کوس ۱} = ۱ - \text{سن ۱}$$

$$(۲) \quad \frac{۱ \text{ سن ۲}}{۱ + \text{ٹان ۱}} = \quad (۲) \quad \text{کوس ۱} = ۱$$

$$(۳) \quad \frac{۱ \text{ کوس ۲}}{۱ - \text{ٹان ۱}} = \quad (۳) \quad ۱ - \text{سن ۱} =$$

$$(۴) \quad \frac{۱ - \text{ٹان ۱}}{۱ + \text{ٹان ۱}} =$$

$$(۵) \quad \frac{۱ - \text{کوس ۱}}{۱ + \text{کوس ۱}} = \quad (۴) \text{ ٹان ۱} = \frac{۱ \text{ سن ۲}}{۱ - \text{ٹان ۱}}$$

۴۸۔ ای طرح سے سن ۱ و کوس ۱ و ٹان ۱ بنام کوٹ ۱ کوسک ۱ اور سن ۱ کے بطریق مفصلہ ذیل ظاہر ہو سکتا ہے۔

$$\text{سن ۱} = \frac{۱ \text{ کوٹ ۱}}{۱ + \text{کوس ۱}} = \frac{۱ \times (۱ - \text{کوسک ۱})}{\text{کوسک ۱}} \text{ یا } ۱ - \text{کوس ۱} = \frac{۱ \times (۱ - \text{کوسک ۱})}{\text{کوسک ۱}}$$

کوس ۱۱ = $\frac{کوس ۱۱ - ۱}{کوس ۱۱ + ۱}$ یا = $\frac{کوس ۱۱ - ۱}{کوس ۱۱}$ یا = ۱ - ۱ (۲ درس آ - درس ۱)
 ۴۹ - ایسے قاعدوں کو نکالنے کا سہل طریقہ یہ ہے کہ پہلے سن ۱ کو کوس ۱۱ کو بنام سن ۱
 کو کوس ۱ کے نکالو۔

مثلاً کوس ۱۱ کو کوس ۱۱ کے برابر ثبوت کرنا ہے چونکہ کوس ۱۱ = کوس ۱ - ۱ سن ۱

$$\text{اور سن ۱} = \frac{کوس ۱۱}{کوس ۱۱} = ۱ - ۱ = \frac{کوس ۱۱ - ۱}{کوس ۱۱}$$

$$۵۰ - \text{چونکہ سن ۱} = (ب + ۱) = \text{سن ۱} \times \text{کوس ۱} + \text{کوس ۱} \times \text{سن ۱}$$

$$\text{اور سن ۱} = (ب + ۱) = \text{سن ۱} \times \text{کوس ۱} - \text{کوس ۱} \times \text{سن ۱}$$

$$\therefore \text{یہی جمع تفریق کرنے سے سن ۱} = (ب + ۱) + \text{سن ۱} = (ب + ۱) + \text{سن ۱} \times \text{کوس ۱}$$

$$\text{سن ۱} = (ب + ۱) - \text{سن ۱} = (ب + ۱) - \text{کوس ۱} \times \text{سن ۱}$$

$$\text{کوس ۱} = (ب + ۱) + \text{کوس ۱} = (ب + ۱) + \text{کوس ۱} \times \text{کوس ۱}$$

$$\text{کوس ۱} = (ب + ۱) - \text{کوس ۱} = (ب + ۱) - \text{کوس ۱} \times \text{سن ۱}$$

$$۵۱ - \text{سن ۱} + \text{سن ۱} \times \text{کوس ۱} = \text{کوس ۱} \times \text{کوس ۱} + (ب + ۱) + \text{کوس ۱} \times \text{کوس ۱}$$

$$\text{چونکہ ۱} = (ب + ۱) + (ب + ۱) = (ب + ۱) + (ب + ۱) \times \text{کوس ۱}$$

$$\text{سن ۱} = (ب + ۱) + \text{کوس ۱} \times (ب + ۱) + \text{کوس ۱} \times \text{سن ۱} \times (ب + ۱)$$

$$\text{سن ۱} = (ب + ۱) + \text{کوس ۱} \times (ب + ۱) - \text{کوس ۱} \times (ب + ۱) \times \text{سن ۱}$$

سن ۱ + سن ب = ۲ سن ۱ + (۱ + ب) کو س ۱ + (۱ - ب) (۱)

سن ۱ - سن ب = ۲ کو س ۱ + (۱ + ب) سن ۱ + (۱ - ب) (۲)

ایطرح سے کو س ۱ + کو س ب = ۲ کو س ۱ + (۱ + ب) کو س ۱ + (۱ - ب) (۳)

کو س ب - کو س ۱ = ۲ سن ۱ + (۱ + ب) سن ۱ + (۱ - ب) (۴)

یہ پارتا دے جو نہایت مفید بن و فہم سے نکل سکتے تھے اگر ۱ + ب کو س (جمع) سمجھتے

۱ - ب کو س (فرق) جس حالت میں ۱ = ۱ + (ج + ف) اور ب = ۱ + (ج - ف)

۵۲ - دفعہ ۱۱ کے مساوات (۲) کو مساوات (۱) سے تقسیم کرنے سے -

$$\frac{\text{سن ۱ - سن ب}}{\text{سن ۱ + سن ب}} = \frac{۲ \text{ کو س ۱} + (۱ + ب) \text{ سن ۱} + (۱ - ب)}{۲ \text{ کو س ۱} + (۱ + ب) \text{ سن ۱} + (۱ - ب)}$$

ایطرح سے اگر دفعہ ۱۱ کے مساوات (۴) کو مساوات (۳) سے تقسیم کریں تو -

$$\frac{\text{کو س ب - کو س ۱}}{\text{کو س ۱ + کو س ب}} = \frac{\text{ٹان ۱} + (۱ + ب) \text{ ٹان ۱} + (۱ - ب)}{\text{ٹان ۱} + (۱ + ب) \text{ ٹان ۱} + (۱ - ب)}$$

$$\frac{\text{سن ۱} \pm \text{سن ب}}{\text{کو س ۱} + \text{کو س ب}} = \frac{\text{ٹان ۱} \pm (۱ \pm ب) \text{ ٹان ۱}}{\text{کو س ۱} + \text{کو س ب}}$$

(دونوں علامات کے اوپر والے لکھنے اور نیچے والے لکھنے سمجھنا چاہیے)

$$\text{سم ۵ - ٹان ۱} \pm \text{ٹان ب} = \frac{\text{سن ۱}}{\text{کو س ۱}} \pm \frac{\text{سن ب}}{\text{کو س ب}} = \frac{\text{سن ۱} \pm \text{کو س ۱}}{\text{کو س ۱}} \pm \frac{\text{سن ب} \pm \text{کو س ب}}{\text{کو س ب}}$$

اسی طرح کوٹ ب \pm کوٹ ۱ = سن (۱ \pm ب) (دونوں علامات کے اوپر لکھیں اور نیچے والے لکھتے سمجھنا چاہیے)

۵۴ سن (۱ + ب) سن (۱ - ب) = سن کوٹ ۱ ب - کوٹ ۱ سن ب
= سن (۱ - سن ب) - (۱ - سن ب) سن ب

= سن ۱ - سن ب

اسی طرح سن (۱ + ب) سن (۱ - ب) = کوٹ ۱ ب - کوٹ ۱

کوٹ ۱ (۱ + ب) کوٹ ۱ (۱ - ب) = کوٹ ۱ ب یا کوٹ ۱ ب - سن ۱

۵۵ - ثابت کرو کہ سن ۱ + سن (۲ - ۱) = ۲ سن (۱ - ۱) کوٹ ۱

اور کوٹ ۱ + کوٹ ۱ (۲ - ۱) = ۲ کوٹ ۱ (۱ - ۱) کوٹ ۱

سن ۱ = (۱ - ۱) + ۱ - سن (۱ - ۱) کوٹ ۱ (۱ - ۱) کوٹ ۱

سن (۲ - ۱) = سن (۱ - ۱) کوٹ ۱ - کوٹ ۱ (۱ - ۱) سن ۱

: سن (۱ - ۱) + سن (۲ - ۱) = ۲ سن (۱ - ۱) کوٹ ۱ (۱)

کوٹ ۱ + کوٹ ۱ (۱ - ۱) کوٹ ۱ - سن (۱ - ۱) سن ۱ اور

کوٹ ۱ (۲ - ۱) = کوٹ ۱ (۱ - ۱) کوٹ ۱ + سن (۱ - ۱) کوٹ ۱

: کوٹ ۱ + کوٹ ۱ (۲ - ۱) = ۲ کوٹ ۱ (۱ - ۱) کوٹ ۱ (۲)

حاصل اگر $n = 2$ تو مساوات نمبر (۱) کے سن ۱ = ۲ سن ۱ کو سن ۱

۱ = ۲ کے کو سن ۱ + ۱ = کو سن ۱

یا کو سن ۱ = ۲ کو سن ۱ - ۱

اگر $n = 3$ تو بموجب مساوات (۱) کے سن ۱ = ۳ سن ۱ = ۲ سن ۱ کو سن ۱ - ۱

= ۳ سن ۱ کو سن ۱ - ۱ = ۳ سن ۱ (۱ - ۱) سن ۱ = ۳ سن ۱ - ۱ سن ۱

اور بموجب مساوات دوم (۲) کے کو سن ۱ = ۲ کو سن ۱ کو سن ۱ - کو سن ۱

= ۲ کو سن ۱ (۲ کو سن ۱ - ۱) - کو سن ۱

= ۳ کو سن ۱ - ۲ کو سن ۱

اور اس طرح سے n کو ۴ و ۵ و غیرہ سمجھنے سے سن ۱ و ۲ و غیرہ کو سن ۱ کو سن ۱

و غیرہ بنام سن ۱ کو سن ۱ کے معلوم ہو سکتے ہیں۔

۵۶۔ اس طرح سے سن ۱ - سن (۲ - ۱) = ۲ کو سن (۱ - ۱) = سن ۱ (۱)

اور کو سن (۲ - ۱) - کو سن ۱ = ۲ سن (۱ - ۱) = سن ۱ (۲)

۵۷۔ دفعہ ۵۶ کے قاعدہ نمبر (۲) سے n کو ۲ و ۳ یا ۴ و غیرہ سمجھنے سے کو سن ۱

کو بنام سن ۱ - سن ۱ - سن ۱ کے نکال سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ n کو ۱ مثبت صحیح عدد و صفت ہے اور برابر ہے ۲ م کے

\therefore کوئٹہ - م - ۱ = ۱ - کوئٹہ - م - ۲ = م - ۱ (م - ۱) سن

اویسیطرت کوس ۲ (م-۲) ۱- کوس ۲ (م-۱) ۱- کوس ۲ (م-۳) ۱- کوس ۲ (م-۱)

کوس ۲ دم ۳- ۱- کوس ۲ دم ۲- ۱- = کوس ۲ دم ۵- ۱- کوس ۱

ذغیرہ = ذغیرہ ذغیرہ

[illegible]

اسیے جوڑنے سے چونکہ کوس ۲ دم-م ہلایکوس = ۱

۱۔ کوس ۲ = سن ۱ + سن ۲م - ۱، سن ۳م - ۱، ... + سن ۱ - سن ۱ کے

[illegible]

اسرار { (۱۵)

اسی طرح سے اگر n طاق ہو اور p برابر ہو $2m + 1$ آکے تو

$$\text{کوس } ۱ + \text{کوس } ۲ - ۱ = \text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱ - ۱ + \text{سن } ۲ - ۱ + \dots + \text{سن } ۱ - ۱$$

(۱) { حسن اول

حاصلِ اُرم = آئوانِ قاعدون سے ظاہر ہونکہ

$$\text{کوس } 1^2 = 1 - 2 \text{ سن } 1 \times \text{سن } 1 = 1 - 2 \text{ سن } 1^2$$

کوس ۱ = کوس ۱ - ۲ سن ۱ × سن ۱ = کوس ۱ - ۲ سن ۱ × سن ۱ × کوس ۱

= کوسل ۱-۴ کوسل ۱ (۱-۱ کوسل ۱) = ۴ کوسل ۱-۳ کوسل ۱

۵۸ - ا. د. و. م. و. م. و. م. کے سابقہ ونگو سائین نکالو

مثبت

$$\text{سن } ۳۶ = \text{کوس } (۹۰ - ۳۶) = \text{کوس } ۵۴ \text{ اگر } ۱۰ = \text{کوس } ۱۰ = \text{کوس } ۱۰$$

$$\therefore \text{سن } ۱ \times \text{کوس } ۱ = ۲ \text{ کوس } ۱ \times \text{کوس } ۱ - \text{کوس } ۱ \quad (۵۵)$$

$$\therefore \text{سن } ۲ = ۲ \text{ کوس } ۱ - ۱$$

$$۲ = (۲ - \text{سن } ۱) - ۱$$

$$\therefore \text{سن } ۱ + \text{سن } ۲ = ۱$$

$$\text{اور اس مساوات کے حل کرنے سے سن } ۱ = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ اور چونکہ سن مثبت ہے}$$

اس لیے اس مساوات کی مثبت علامت لینا چاہیے

$$\therefore \frac{1}{2} (۱ - \sqrt{5}) = \text{سین } ۱۸ = \text{کوسین } (۹۰ - ۱۸) = \text{کوسین } ۷۲ \dots (۱)$$

$$\text{اور کوس } ۱۸ = ۱ - \text{سن } ۱۸ = ۱ - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\therefore \text{کوس } ۱۸ = \frac{1}{2} (۱ + \sqrt{5}) = \text{سن } ۷۲ \dots (۲)$$

$$\text{اور سن } ۳۶ = \text{کوس } ۵۴ = \text{کوس } ۱۸ \times ۲ = \text{کوس } ۱۸ - \text{سن } ۱۸$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} =$$

$$\therefore \frac{1}{2} (۱ + \sqrt{5}) \dots (۳)$$

$$\text{کوس } ۱۸ = ۱ - \text{سن } ۱۸ = ۱ - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \text{کوس } ۳۶ = \frac{1}{2} (۱ - \sqrt{5}) = \text{سن } ۳۶ \dots (۴)$$

۵۹۔ دریافت کرو کہ کسی زاویہ کو پرہے ثبوتی سے اس کا سائل کتنا برہیگا۔

فرض کرو کہ زاویہ ۱ میں زاویہ ط جوڑا گیا ہے اور فرض کرو کہ یہ سبب اس زیادتی کے جو زیادتی ساین ۱ میں ہوے اس کے عوض میں ۵ ساین ۱ سمجھا گیا ہے تو

$$۵ \text{ ساین } ۱ = \text{سن } (۱ + ط) - \text{سن } ۱ = \text{کوس } ۱ - \text{کوس } ۱ + ط - \text{سن } ۱$$

$$= \text{کوس } ۱ \times \text{سن } ط - \text{سن } ۱ (۱ - \text{کوس } ط)$$

$$= \text{کوس } ۱ \times \text{سن } ط (۱ - \text{ٹان } ۱) = \frac{\text{سن } ۱}{\text{کوس } ط} (۱ - \text{ٹان } ۱) = ۳۹ \dots \dots$$

$$= \text{کوس } ۱ \times \text{سن } ط (۱ - \text{ٹان } ۱) = \frac{\text{سن } ۱}{\text{کوس } ط} (۱ - \text{ٹان } ۱)$$

$$\text{کوس } ۱ \text{ سن } ط (۱ - \text{ٹان } ۱) = \text{ٹان } ۱ \times \text{ٹان } ط$$

ماصل اگر ط زاویہ چوٹا ہو تو ٹان ۱ ط نہایت چوٹا ہے اور مساوات مندرجہ بالا میں

اگر ٹان ۱ نہایت بڑا ہو تو یعنی اگر اقرب $(۱ + ۲) = ۹۰$ ہو جان ن برابر ہو

عدو کے تو ٹان ۱ ط نہایت چوٹا عدو ہے اور بڑا شایہ صحیح عدو ایک کے

اس کا لحاظ نہیں ہوتا اور چوڑا دیا جاسکتا ہے ایسے جس حالت میں ط نہایت چوٹا ہے

فقیریب $(۱ + ۲) = ۹۰$ کے نہیں ہے تو $۵ \text{ سن } ۱ = \text{کوس } ۱ \times \text{سن } ط$ (فقیریب)

سے یہ ظاہر ہے کہ مساوات مندرجہ بالا مستعمل نہیں ہوتا جب کسی ثلث کا زاویہ

ہوتا ہے کیونکہ اگر اقرب ایک قایمی کی ہو تو زیادتی سن ۱ کی جو باعث ازتراد ۱

ہوتی ہے نہیں دریافت ہو سکتی ہے

۶۰۔ اگر کوئی زاویہ بڑھ جاوے تو دریافت کرو کہ اس کا کوسا میں کتنا گھٹ جاوے گا

$$4 \text{ کوس } 1 = \text{کوس } (1 + ط) = \text{کوس } 1 \times ط - \text{سن } 1 \times \text{سن } ط - \text{کوس } ط$$

= سن ۱۰۰ سن ۶ - کوس ۱ (۱۰۰ - کوس ۶)

$$= -\text{سن این ب} (1 + \text{کوٹ 1} \times \frac{\frac{1}{5} \text{ سن 1}}{5})$$

$$= \text{سن ۱} \times \text{سن ۲} + \text{کوٹ ۱} \times \text{نمان ۱} \text{ ط ۱}$$

ماصل ۱۔ موافق بیان دفعہ ۹ کے اگر ط نہایت چوٹا زاد یہ ہو اور کوٹ ۱ نہایت بڑا ہو

(یعنی اگر 1 n \times 90° کی قریب نہو) تو کوٹ 1 \times مان 1/4 ط اور بشا یہ صحیح حد ایک کے

چھوڑ دیا جاسکتا ہے اور Δ کو $\Delta = \Delta_{\text{سن}} \Delta_{\text{سن}}^*$ (قریب)

اس سے یہ ثابت ہے کہ اگر (۱) طہت چوٹا زاویہ ہو اور (۲) ل قریب صفرا ہو۔

کے نہ تو میسوات اور ساتین مستعمل نہیں ہوتا جبکہ کسی مثلث کا زاویہ ہے

حاصل ورم۔ اگر ۱۰۰ سے کم ہو تو کوس ۱۰ و سن ۱۰ و وزن مثبت ہے اور اسلئے

۱۰ کو کس! اس حالت میں ضرور منفی ہوگا پس اوں زاویوں کے کوسا میں جو

قادی سے چوٹے ہن گھٹتے جائیں گے جون جون ناویہ بڑھتا جاوے گا۔

اگر ایک قیامی سے بڑا اور وقتاً میمن سے چھوٹا ہو تو کوس ارضی اور سن۔

مثبت ہے ایسے : کوس ل منفی ہے پس اون زاویوں کا کوساين جو ایک قائمہ سے بڑی اور دو قائمہ سے چھوٹی۔ بچ بڑھتی جاوی گی مگر منفی رہے گی۔

۱۱۔ اگر کوئی زاویہ بڑھ جاوے تو دریافت کرو کہ یہ سبب اسکی بڑھنے کے اوسکا سکٹ کتنا بڑھے گا۔

$$\begin{aligned} \text{ہسک ل} &= \text{سک ل} (1 + ط) = \text{کوس ل} (1 + ط) - \text{کوس ل} \\ &= \frac{\text{کوس ل} - \text{کوس ل} (1 + ط)}{\text{کوس ل} \times \text{کوس ل} (1 + ط)} = \frac{\text{کوس ل} \times \text{سن ل} (1 + ط) + \text{کوس ل} (1 + ط) - \text{کوس ل} (1 + ط)}{\text{کوس ل} \times \text{کوس ل} (1 + ط)} \\ &= \frac{\text{کوس ل} \times \text{سن ل} (1 + ط) + \text{کوس ل} (1 + ط) - \text{کوس ل} (1 + ط)}{\text{کوس ل} \times \text{کوس ل} (1 + ط)} \\ &= \frac{\text{کوس ل} \times \text{سن ل} (1 + ط) + \text{کوس ل} (1 + ط) - \text{کوس ل} (1 + ط)}{\text{کوس ل} \times \text{کوس ل} (1 + ط)} \\ &= \frac{\text{کوس ل} \times \text{سن ل} (1 + ط) + \text{کوس ل} (1 + ط) - \text{کوس ل} (1 + ط)}{\text{کوس ل} \times \text{کوس ل} (1 + ط)} \end{aligned}$$

ماہل اگر ط نہایت چھوٹا ہو اور ٹان ل کوٹ ل دو نون بڑی نہون (یعنی اگر ان دو کے قریب نہویمین ن صغریٰ صحیح عدد مثبت یا منفی ہے) تو کوٹ ل (ٹان ل ط) اور ان ل ٹان ل دو نون ایسے چھوٹے ہونگے کہ اونکا ہونا و نہونا برابر ہے لہذا اونکو الگ کر دیں

ہسک ل = ٹان ل : سک ل × ٹان ط (عقرب)

یاد رکھنا چاہیے کہ اگر کسی ثلث کا زاویہ ہوے تو یہ قاعدہ صرف اوسی حالت میں کارآمد ہو سکتا ہے جب ط نہایت چھوٹا زاویہ ہے اور ل صغریٰ ۹۰ یا ۱۸۰ کے قریب نہیں ہے

۶۳۔ اگر کوئی زاویہ بڑھ جاوے تو دریافت کرو کہ یہ سبب بڑھنے زاویہ مذکور کے
اوس کا باجٹ کتنا بڑھ جاوے گا۔

$$\Delta \theta = \theta - (\theta + \Delta \theta) = \theta - \frac{\sin(\theta + \Delta \theta)}{\cos(\theta + \Delta \theta)} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\sin(\theta + \Delta \theta) \cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta) \sin \theta}{\cos(\theta + \Delta \theta) \cos \theta}$$

$$\text{مگر } \sin(\theta + \Delta \theta) \cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta) \sin \theta = \sin(\theta - (\theta + \Delta \theta)) = \sin(-\Delta \theta)$$

$$\therefore \Delta \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

حاصل اگر ط نہایت چوٹا ہے اور ثاں نہایت بڑا ہو (یعنی لم (۱۲ + ۱) ۰ ۹ کے

قریب نہو اور یہاں ۱۲ = صفر یا کسی صحیح عدد کے) تو $\Delta \theta = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$ ثاں رغبہ

اگر کسی شلت کا زاویہ ہو تو قاعدہ کارآمد نہوگا۔ جب زاویہ ایک قائمہ کی ہے۔

۶۴۔ اگر زاویہ ۱ درجہ جاوے تو اوس زاویہ کے سن کو زیادتی ۷ = ۷ ہوگی کو سٹ

کی کمی سے موجب اسکے کہ کو س ۱ = ۷ = ۷ سن ۱ سے جس حالت میں نہایت چوٹا یا ۰ ۹

کی اصغاف کی قریب نہو کیونکہ $\Delta \theta = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \times ۱۲ = ۰ ۹$ کی

قریب نہو (موجب دفعہ ۰ ۹ کے حاصل کی)

$$\Delta \theta = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \times ۱۲ = ۰ ۹ \text{ کے قریب نہو}$$

۵۰
اسی لیے اگر ن صفر یا کوئی صحیح عدد ہو) اور اگر بہت چوٹا یا غنقریب

۹۰ کی اصناف کی نہو۔

۷ = ۷ (۵ کوس ۱) ہوگا چونکہ کوس ۱ = ۷ سن ۱ ہے

56

اون راویون میں جو ۹۰ ڈگری سے کم ہیں ۱۷ یا ۲۰ - ۱۵ کوس ۱۱ کا ہے

جب ۱۰۴ سے کم خواہ زیادہ ہے دفعہ ۳۱ کی بموجب

۶۴۔ اصطلاحِ ثمانِ ث سی اوس زاویہ سے مراد ہے جس زاویہ کا ثمانِ ث ہے

یعنی اگر ٹ = ٹان اتوا = ٹان جاٹ

اسی طرح حسن ساج اور کوس اپر وغیر دسے اوس زاویہ سے مراو ہے

بنکاسن راج اور جسکا کوکس پرجہ وغیرہ ہے۔

۶۵۔ ثابت کرو کہ $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a+b}{1-ab}$

مان اٹ - مان اٹ = مان ۱ + مان ۲

فرض کرو کہ 1 = ش اور 2 = ب = ش

تب بموجب اصطلاح (۶۴) کی $اٹ = ٹان - اٹ$ اور $ب = ٹان - اٹ$

$$اب ٹان (ا + ب) = \frac{ٹان (ا + ب)}{ا - ٹان (ا + ب)}$$

$$ب بموجب اصطلاح $ا + ب = ٹان - اٹ$$$

$$یا ٹان - اٹ + ٹان - اٹ = ٹان - اٹ \quad (۱) \dots\dots\dots$$

$$اسی طرح سے ٹان - اٹ - ٹان - اٹ = ٹان - اٹ \quad (۲) \dots\dots\dots$$

۶۶۔ اگر $اٹ$ و $ٹ$ کسی زاویہ کی یا بجٹ ہوں تب

$$ٹان - اٹ - ٹان - اٹ = ٹان - اٹ + ٹان - اٹ + ٹان - اٹ + ٹان - اٹ$$

$$ٹان - اٹ - ٹان - اٹ = ٹان - اٹ + ٹان - اٹ$$

$$ٹان - اٹ - ٹان - اٹ = ٹان - اٹ + ٹان - اٹ$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$ٹان - اٹ - ٹان - اٹ = ٹان - اٹ + ٹان - اٹ$$

$$ب بموجب اصطلاح سے ٹان - اٹ - ٹان - اٹ = ٹان - اٹ + ٹان - اٹ + ٹان - اٹ + ٹان - اٹ$$

۶۷۔ متبیلین اوں سوالوں کی جو حل ہو سکتی ہیں اوں قاعدوں سے جنکا ذکر باب

دوسرے میں ہوا ہے۔

علم شد

$$(۱) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{\text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱}{\text{سگ } ۱ + \text{ٹان } ۱} = ۵۲$$

(اس مساوات کو ثابت کرنے کے لیے کسر کے نسبت نما کو کوس ۱ یا کوس ۱ سین ۱ کی صورت میں لانا چاہیے اس لیے نسبت نما اور شمار کنندہ دونوں کو شمار کنندہ سے ضرب وتلو)

$$\frac{\text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱}{\text{کوس } ۱ - \text{سن } ۱} = \frac{(\text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱) \times ۲}{\text{کوس } ۱ - \text{سن } ۱} = \frac{\text{کوس } ۲ + \text{سن } ۲}{\text{کوس } ۱ - \text{سن } ۱} = \frac{۱ + \text{سن } ۲}{\text{کوس } ۱}$$

$$\text{موجب و فعات (۶۲، ۶) اور (۳۸، ۳۹)} = \frac{۱}{\text{کوس } ۱} + \frac{\text{سن } ۲}{\text{کوس } ۱} = \frac{\text{سگ } ۱ + \text{ٹان } ۱}{\text{کوس } ۱}$$

$$(۲) \text{ ثابت کرو کہ کوس } ۱ = \frac{۱}{۱ + \text{ٹان } ۱ \times \text{ٹان } ۱} \text{ (اگر اس مساوات کو اولٹ دیوین تو}$$

$$\text{کوس } ۱ = \frac{۱}{۱ + \text{ٹان } ۱ \times \text{ٹان } ۱} \text{ اگر دہنی طرف کے جز کو } ۱ + \text{کے سین و کوسین}$$

میں لاکر کسر کے صورت میں کہیں تو نسبت سا کوس ۱ × کوس ۱ ہوگا اور شمار کنندہ میں نیز

زاویوں کے سین اور کوسین ادیگی اس لیے پہلی کوس ۱ کو ایسی صورت کے کسر میں

ظاہر کرنا چاہیے)

$$\frac{\text{کوس } ۱}{\text{کوس } ۱ \times \text{کوس } ۱} = \frac{\text{کوس } ۱}{\text{کوس } ۱ \times \text{کوس } ۱} = \frac{۱}{\text{کوس } ۱}$$

$$\frac{\text{کوس } ۱ \times \text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱ \times \text{سن } ۱}{\text{کوس } ۱ \times \text{کوس } ۱} = \frac{۱}{\text{کوس } ۱} + \frac{\text{سن } ۲}{\text{کوس } ۱} = \frac{۱ + \text{سن } ۲}{\text{کوس } ۱}$$

$$۱ + \text{ٹان } ۱ \times \text{ٹان } ۱ = \frac{۱}{\text{کوس } ۱} \therefore \frac{۱}{۱ + \text{ٹان } ۱ \times \text{ٹان } ۱} = \text{کوس } ۱$$

ذیل کی مساواتوں میں وہ زاویہ دریافت کرنا ہے کہ جس کے یا جب کے اصعاف کے
سایں وغیرہ سے دی مساوات موضوع ہوئی ہیں

(۳)۔ زاویہ ۱ کی وہ مقدار دریافت کر جس سے سن ۱ = سن ۱ صیح نکلی

$$\text{سن } ۱ = \text{سن } ۱ = \text{سن } ۱ \text{ کو } ۱۰۰ \text{ دفعہ } ۳۸$$

$$\therefore ۲ \text{ کو } ۱ = ۱ \text{ اور } ۱ \text{ کو } ۱ = ۱ \text{ پس } ۱ = ۶۰ \text{ دفعہ } ۳۲$$

(۴)۔ زاویہ ب کے یہ مقدار دریافت کر جس سے سن ۱ + سن (۲ + ۱)

$$\text{سن } (۲ + ۱) = \text{سن } (۲ + ۱) - \text{سن } (۱ - ۱) \text{ صیح نکلی}$$

دفعہ ۱۰ کے ضمیمہ ۱ کے بموجب مساوات بالا کے صورت یوں ہے۔

$$\text{سن } ۱ + ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ب سن } ۱ = ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ب سن } ۱$$

$$\therefore ۱ + ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ب } ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ب}$$

$$\therefore ۱ + ۲ (۲ \text{ کو } ۲ \text{ ب } - ۱) = ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ب بموجب دفعہ } ۳۹$$

$$\text{اس سے یہ نکلتا ہے کہ کو } ۲ = \frac{۱}{۱۰} (۱۰ - ۱)$$

مگر بموجب دفعہ ۸ ضمیمہ ۳ کے $\frac{۱}{۱۰} (۱۰ + ۱) = \text{کو } ۲$ اور اسی دفعہ کے ضمیمہ (۱) کے

$$\text{روسی } \frac{۱}{۱۰} (۱۰ - ۱) = \frac{۱}{۱۰} (۱۰ - ۱) = \text{کو } ۲ = \text{کو } ۲ (۱۰ - ۱) = \text{کو } ۲$$

$$\therefore \text{ب } = ۳۶^\circ \text{ یا } ۱۰۸^\circ$$

عظیم شریف

41

(۵) ثابت کرو کہ $2 \cos 11^\circ 10' = 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$$\therefore 1 - 1^2 = 1 - 2 \times 1 \times 1 + 1^2 \times 1 \times 1$$

$$\therefore 1^2 - (1 + 1 \times 1) = 1^2 - 2 \times 1 \times 1 = 0$$

$$\therefore 1^3 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times 1 + 3 \times 1 \times 1 \times 1 - 1^3 \times 1 \times 1 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times 1 + 3 \times 1 \times 1 \times 1 - 1^3 = 0$$

$$(4) \text{ ثابت کرو کہ } 1^n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = 1^n$$

$$1^n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = 1^n$$

$$\text{اسی طرح } 1^n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = 1^n$$

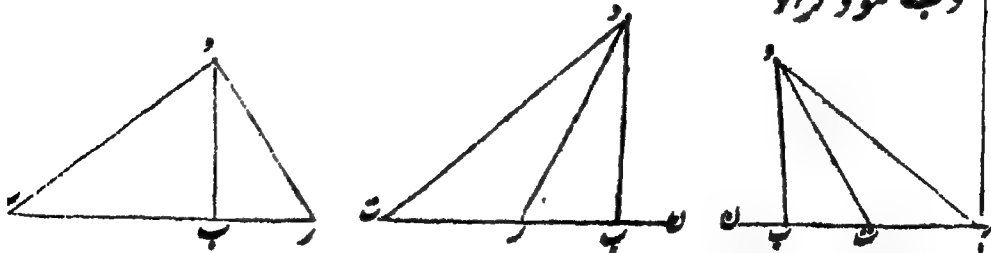
$$\therefore 1^n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = 1^n$$

$$1^n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = 1^n$$

باب چہارم مثلثوں کی حل کرنے کے بیانیہ

۴۹۔ مثلث چہ جزوں سے مرکب ہوتا ہے یعنی تین اضلاع اور تین زاویہ ان جزوں سے کوئی تین جنہ سوائے تین زاویوں کی اگر معلوم ہوں تو باقی تین یا کثیر معلوم ہو سکتے ہیں۔ مثلثوں کے زاویوں میں جتنی ڈگری ہوں ان کو جو دو حصہ میں ۹۰ سہی جو تناسب زاویوں پر رکھی گئی ہیں ظاہر کرنے کے اور ان کی سامنے والے ضلع کی لمبائی کو جہتوں سے ڈر سے ظاہر کریں گے۔

۵۰۔ کسی مثلث کی زاویوں کا سین اور ان زاویوں کی مجانبی اضلاع سے تناسب ہوتا ہے فرض کرو کہ ت در ایک مثلث ہی نقطہ سے ت پر یا اوسکی بڑھائی ہوئی حصہ پر دب عمود گراو



$$\text{تو سن دت ر} = \text{سن دت ب} = \frac{\text{دب}}{\text{تت}}$$

تیسری شکل کی نسبت میں دفعہ ۲۶ دیکھو

اور سن ورت = سن و رب = $\frac{ورٹ}{ور}$

سن ورت = $\frac{ورٹ}{ور}$

سن ورت = $\frac{ورٹ}{ور}$ یا سن ورت = $\frac{سن}{ور}$

اسی طرح سے اگر نقطہ رسوا دسکے مقابل کے ضلع یا بڑا ہاں ہوتے حصہ پر عمود ڈالیں تو ثابت ہو سکتا ہے۔

سن ورت = $\frac{سن}{ور}$

ایسے سن ورت = $\frac{سن}{ور}$ = $\frac{سن}{ور}$ اس میں ا حروف ٹ ٹ و ا و ن اعداد کی بجای رکھی گئی ہیں جو اعداد ظاہر کرتے ہیں کہ ایک فی لمبائی کی ا و ن ضلعوں میں کدے مرتبہ ہے کیونکہ بغیر اسکے سن ورت اور ت ایک قسم کی مقدار نہیں ہو سکتی ہے اور اس سبب سے ا و ن کی درمیان کسی تناسب کا ہونا ممکن نہ ہوگا۔

۷۱۔ چونکہ کسی مثلث کی تینوں زاویہ ملکر برابر ہوتے ہیں دو قایمہ کی قیاس میں تعالہ اول شکل آ

سن ورت = $\frac{ورٹ}{ور}$ ۱۸۰ ڈگری اور

سن ورت = $\frac{ورٹ}{ور}$ اور سن ورت = $\frac{ورٹ}{ور}$

اور ان تین مساواتوں کے ذریعہ سے اگر مثلث کی تین ہی جز معلوم ہوں تو باقی تین جز معلوم ہو سکتے ہیں تین جزوں معلوم میں ایک جز ضرور ایک ضلع ہونا چاہیے۔

مثلاً معلوم ہونے کے جو ضلعوں ٹ ڈ ٹ کی درمیان میں ہیں اور لمبائی اضلاع ٹ ڈ ٹ کی معلوم ہونا غیر ممکن ہو گا کیونکہ اس حالت میں صرف دو ہی مساوات
یعنی $\frac{\text{سن}}{\text{سن}} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ٹ}}$ اور $\frac{\text{سن}}{\text{سن}} = \frac{\text{ڈ}}{\text{ڈ}}$ واسطے دریافت کرنے
میل جزو غیر معلوم یعنی ٹ ڈ ٹ کی ہونگی اور صرف دو مساوات سے میل جزو غیر معلوم نہیں ہو سکتے۔

ظاہر ہے کہ کسی مثلث معینہ کی گردائے مثلث بی شمار ہو سکتے جنکے راوی مثلث معینہ کے زاویوں کی ڈگری کی برابر ہوں اور جنکے اضلاع مثلث معینہ کی اضلاع کے متوازی ہوں۔

۷۲۔ صرف ایک حالت میں جسکو حالت شکے کہتے ہیں مساوات دفعہ ۱ سے وہ مثلث کہ جسکے تین جزو معلوم ہیں دریافت نہیں ہو سکتا ہے۔

اگر دو اضلاع اور ایک زاویہ مقابل ایک ضلع معلوم کسی مثلث کا یعنی اضلاع ٹ ڈ اور زاویہ ت معلوم ہوں تو باقی ایک ضلع اور دو زاویے مثلث کی صرف اس حالت میں معلوم ہو سکتے ہیں جب کہ زاویہ معلومہ کی مقابل کا ضلع معلومہ دوسرے ضلع معلومہ سے بڑا ہو یعنی جب ضلع ٹ بڑا ہے ضلع ڈ سے۔

مساوات دفعہ ۱ کی یہ ہیں۔

$$(۱) \quad r + d = ۱۸۰ - t \quad (۲) \quad \sin r = \frac{\sin t}{\sin d} \times \sin t$$

$$(۳) \quad d = \frac{\sin t}{\sin r} \times \sin r$$

اگر (۲) سے معلوم ہو سکتا ہے تو دوم ڈ بذریعہ مساوات (۱) اور (۳) سے معلوم ہو سکتے ہیں اور کل ثلث جبکی یہ ضلع اور زاویہ ہیں معلوم ہو سکتا ہے مگر چونکہ سن کسی زاویہ کا برابر ہے سن ضمیمہ اس زاویہ کی اسلئے زاویہ رکے دو جواب ہیں جس سے مساوات (۲) صحیح نکلتا ہے اور جن دو جوابوں سے ایک جواب درست پڑا ہے اور دوسرا کم۔

اول فرض کرو کہ ٹ بڑا ہے t سے \therefore ت، ر قلیدس کے (مقالہ اول شکل ۱۸) مگر $r + d = ۱۸۰$ سے بڑا نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو $t + r + d$ اسے برا ہو گا اور یہ غیر ممکن ہے قلیدس کے (مقالہ اول شکل ۱۸)

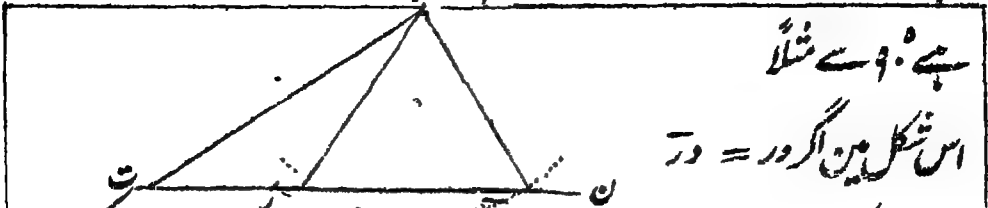
$\therefore r + d = ۱۸۰$ اور چوٹے زاویہ کو ر کا مقدار سمجھنے سے مساوات

(۲) صحیح ہو گا۔

دوئم فرض کرو کہ ٹ چوٹا ہے t سے \therefore ت در اس حالت میں چونکہ $t + r + d = ۱۸۰$ دور r سے صحیح ہو سکتے ہیں اگر ر بڑا ہو خواہ چوٹا ہو $r + d$ سے اسلئے مساوات (۲) سے یقین معلوم ہو سکتا کہ ر بڑا ہے یا چوٹا

مثبت

۹۰



تو ظاہر ہے کہ دونوں دت ر اور دت ر مثلثوں میں ت اور ت کی مقدار ایک ہی ہے اور اس صورت میں ت چوٹا ہے بیرونی زاویہ د ر سے یا بیرونی زاویہ درن سے یعنی کے ت چوٹا ہے د رت سے اور اس لیے چوٹا ہی کے د رت سے اور ٹ چوٹا ہے ر سے اور پچھلے بھی یہی بتلایا گیا تھا۔

۷۳۔ ایک مثبت کی کسی زاویہ کا کو سین بنام اوسکے ضلع کی نکالو۔
(دفعہ ۷ کی اشکال کو دیکھو)

فرض کرو کہ ر و ایک مثبت ہے نقطہ د سے ت ر یا ت ر کی کسی طرف کوڑا ہائی حصہ پر د ب ایک۔ نمود ڈالو۔

اب بموجب شکل ۱۳۔ مثال دوم کی ت ل = ت ڈ + ت ل = ت ر + ت ر دت ب دفعہ ۷ کی اشکال اول و دوم میں۔

اور شکل سوم میں د ر = ت ڈ + ت ل + ت ر دت ب قیاس کر (شکل ۱۲ مقالہ دوم)

اور شکل اول و دوم میں ت ل = ت ل۔ کوس دت ب = کوس دت ر

= کوس دت ر۔۔۔۔۔ شکل سوم میں بموجب دفعہ ۲۱

ایسے ہر ایک ان حالتہ بن مین

$$\text{وڑ} = \text{ت} + \text{ڈ} + \text{ت} - \text{ڑ} - ۲ \times \text{ت} \times \text{ڑ} + \text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ}$$

$$\therefore \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} = \frac{\text{ت} + \text{ڈ} + \text{ت} - \text{ڑ} - ۲ \times \text{ت} \times \text{ڑ} + \text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}$$

$$\text{۴۷۔} \text{ظاہر کرو کہ کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} = \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}} \text{ جہاں س} = \text{ٹ} + \text{ٹ} + \text{ڑ} + \text{و}$$

$$\text{کیونکہ } ۱ + \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} = \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}} + ۱ = \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} + ۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}$$

$$= \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} + ۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}} = \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} + ۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}$$

$$\text{اب } ۱ + \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} = \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} + ۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}} \dots \dots \dots (\text{دفعہ ۳۹} (۲))$$

$$\text{اور س} - \text{ٹ} = \text{ٹ} + \text{ٹ} + \text{ڑ} + \text{و} - \text{ت}$$

$$= \text{ٹ} + \text{ٹ} + \text{ڑ} + \text{و} - \text{ٹ}$$

$$\therefore \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} = \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} + ۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}$$

$$= \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} + ۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}$$

$$\therefore \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} = \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} + ۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}$$

$$\text{۷۵۔} \text{ثابت کرو کہ س} \times \text{ڑ} = \frac{\text{و} \times \text{کو} \times \text{س} + \text{ت} \times \text{ڑ} + ۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}}{۲ \times \text{ڑ} - \text{ٹ}} \times (\text{س} - \text{و})$$

مبہوب و فضائل (۲) کے ظاہر ہے کہ۔

$$\frac{1}{2} \text{ سن } \frac{1}{2} \text{ ت} = 1 - \text{کوس } \text{ت} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \text{ ت} + \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ}}{\frac{1}{2} \text{ ت} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ}} = \frac{\frac{1}{2} \text{ ت} - \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ}}{\frac{1}{2} \text{ ت} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ}}$$

$$\text{اب س} - \text{ٹ} = \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{ٹ} + \text{ڈ} + \text{ڈ}) - \text{ٹ} = \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{ٹ} + \text{ڈ} - \text{ڈ})$$

$$\text{اسی طرح س} - \text{ڈ} = \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{ٹ} + \text{ڈ} - \text{ٹ})$$

$$\therefore \text{سن } \frac{1}{2} \text{ ت} = \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{س} - \text{ٹ}) \times \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{س} - \text{ڈ})$$

$$\therefore \text{سن } \frac{1}{2} \text{ ت} = \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{س} - \text{ٹ}) \times \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{س} - \text{ڈ})$$

یہاں اور دو جگہ مثبتہ میں علامت نشان جذر کی ضرورت مثبت ہو کی کیونکہ ت ایک زاویہ
مثبت کا ہے اور ۹۰ اسے کم ہے اسلئے کوس ۱/۲ اور سن ۱/۲ ت خواہ خواہ مقدار
مثبت ہیں۔

$$\frac{1}{2} \text{ سن } \frac{1}{2} \text{ ت} = 1 - \text{کوس } \text{ت} = 1 - (\text{کوس } \text{ت} + \text{کوس } \text{ت})$$

$$\left\{ \frac{\frac{1}{2} \text{ ت} + \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ}}{\frac{1}{2} \text{ ت} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ}} - 1 \right\} \times \left\{ \frac{\frac{1}{2} \text{ ت} + \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ}}{\frac{1}{2} \text{ ت} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ}} + 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ت} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ} \times \frac{1}{2} \text{ ت} + \frac{1}{2} \text{ ڈ} \times \frac{1}{2} \text{ ت} =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ت} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ} \times \frac{1}{2} \text{ ت} + \frac{1}{2} \text{ ڈ} \times \frac{1}{2} \text{ ت} =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ت} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ} \times \frac{1}{2} \text{ ڈ} - \frac{1}{2} \text{ ٹ} \times \frac{1}{2} \text{ ت} + \frac{1}{2} \text{ ڈ} \times \frac{1}{2} \text{ ت} =$$

$$\therefore \text{سن } \frac{1}{2} \text{ ت} = \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{س} - \text{ٹ}) \times \frac{1}{2} \text{ ت} (\text{س} - \text{ڈ})$$

$$\text{اسی طرح } \frac{1}{t} = \frac{\text{س } \frac{1}{t}}{\text{کو س } \frac{1}{t}} = \frac{(s - t) \times (s - t)}{(s - t)}$$

دویم فرض کرو کہ n عدد طاق ہے اور برابر ہے $m + 1$ کے

$$\{n \times 180^\circ \pm 180^\circ\} = \text{کو س } (m \times 180^\circ \pm 180^\circ \pm t) \quad \{$$

اس مساوات میں m کی اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، وغیرہ علی التواتر مقرر کرنے سے

$$\text{یہ زاویے نکلتے ہیں یعنی } 180^\circ \pm 180^\circ \pm t, 360^\circ \pm 180^\circ \pm t, 540^\circ \pm 180^\circ \pm t, \dots$$

..... وغیرہ ان سب زاویوں کی کوسائین اوسی مقدار کی ہیں جبہ کوسائین $180^\circ \pm t$ کو اوپر

$$= \text{کو س } (180^\circ \pm t) = -\text{کو س } t$$

اسی لئے اول چیز اس مساوات سے دو قسم زاویوں کی جگہ کوسائین ایک مقدار کے ہیں مگر مختلف علامت ہیں نکلے۔

اور اسے بطرح تھے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\sin t$ ، $\cos t$ ، $\tan t$ کی جوابدہنیں

جود و علامتیں یعنی مثبت اور منفی کی آتی ہیں اوسے دو قسم کے زاویوں ہی نکل سکتے ہیں۔

۱۔ مثلث قائمہ الزاویہ کے حل کرنے کے بیان میں

۸۔ مثلث قائمہ الزاویہ کا زاویہ قائمہ اور ایک ضلع اور ایک اور جزو پایا گیا

ہے ان جزو ان معلومہ کے ذریعہ سے باقی ماندہ جزو مثلث مذکور کے

دریافت کرو۔

فرض کرو کہ t رد ایک مثلث قائمہ الزاویہ ہو اور t زاویہ قائمہ ہے۔

اول فرض کرو کہ ڈ اور ٹ علاوہ زاویہ قایمہ کے باقی دو جز معلوم ہیں



تو کوس ت = $\frac{ڈ}{ٹ}$ اور سن ت = $\frac{ز}{ٹ}$

لیٹ = لی ڈ + ل کوس ت - ۱۰ اس سے ڈ نکلی گا

لیٹ = لی ڈ + ل سن ت - ۱۰ اس سے ٹ نکلی گا

اور ر = ۹۰ - ت اس سے زاویہ ز نکلی گا

اسی طرح سے اگر زاویہ ر معلوم ہو تو زاویہ ت نکل سکتا ہے۔

دوم فرض کرو کہ ت اور ر معلوم ہیں علاوہ زاویہ قایمہ کے

تو سک ت = $\frac{ڈ}{ٹ}$ اور ٹان ت = $\frac{ز}{ٹ}$

لی ڈ = لی ز + ل سک ت - ۱۰ اس سے ڈ نکلی گا

لیٹ = لی ز + ل ٹان ت - ۱۰ اس سے ٹ نکلی گا

اور ز = ۹۰ - ت اس سے زاویہ ز نکلی گا۔

سوم فرض کرو کہ ت اور ٹ علاوہ قایمہ کے معلوم ہیں

ٹوٹان ت = $\frac{ڈ}{ٹ}$ اور $\frac{ز}{ٹ} = \frac{ٹان ت}{سک ت}$ اور لیٹ = لیٹ - ل ٹان ت + ۱۰

اور سن ت = $\frac{ڈ}{ٹ}$ اور $\frac{ز}{ٹ} = \frac{سن ت}{سک ت}$ اور لیٹ = لیٹ - ل کوس ت + ۱۰

اور لی ڈ = لیٹ - ل سن ت + ۱۰ اور ر = ۹۰ - ت

چہارم فرض کرو کہ ٹ اور ژ علاوہ قایمہ کے معلوم ہیں

$$\text{تو ثا ن ت} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ژ}} :: \text{ل ثا ن ت} = \text{ل ٹ} - \text{ل ژ} + ۱۰$$

$$\text{اور ز} = ۹۰ - ۵۰ \text{ اور } \frac{\text{ٹ}}{\text{ژ}} = \text{سک ت}$$

$$:: \text{ل ٹ} = \text{ل ژ} + \text{ل سک ت} - ۱۰$$

مساوات ڈ = ۱۰ (ٹا + ژا) سے ڈ معلوم ہوگا مگر عمل نکالنے ڈ کا بہت بہاری ہے
خصوصاً اگر ٹ اور ژ بڑی اعداد کی واسطے آئی ہوں۔

پنجم فرض کرو کہ ڈ اور ٹ علاوہ قایمہ کے معلوم ہیں

$$\text{تو سن ٹ} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}} \text{ اور } :: \text{ل سن ت} = \text{ل ٹ} - \text{ل ڈ} + ۱۰$$

$$\text{اور } \frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}} = \text{کوس ت} :: \text{ل ژ} = \text{ل ڈ} + \text{ل کوس ت} - ۱۰$$

$$\text{یا ژا} = ۲ = \text{ٹا} - \text{ڈا} = (\text{ڈ} + \text{ٹ}) - (\text{ڈ} - \text{ٹ})$$

$$:: \text{ل ژ} = \frac{۱}{۲} \{ \text{ل ڈ} + (\text{ڈ} + \text{ٹ}) + \text{ل ڈ} - (\text{ڈ} - \text{ٹ}) \}$$

اس سے ژ بلا نکالنے ت کے معلوم ہوگا۔

۷۹۔ مختلف حالتوں میں مختلف طریقے واسطے دریافت کرنے جزو غیر معلومہ کے

استعمال کرنا چاہیے مضمون مندرجہ شرح (۳ کے ۱۱ دفعہ کا) صحت کے ساتھ یاد رکھنا

ضرور ہے اور ہر حالت میں ایسا قاعدہ منتخب کرنا چاہیے جس سے نتیجہ نہایت صحیح نکلے۔

مثلاً اگر حالت اخیر میں یعنی خیم میں ٹ بہت چھوٹا ہو بمقابلہ ٹ اور ڈ کے تو زاویہ ت
 غریب زاویہ قائمہ کے ہوگا اور زاویہ ت میں تھوڑی زیادتی ہونے کی سبب سے
 سن ت میں جو زیادتی ہوگی [یعنی کوس ت × سن ٹ × {۱ - ٹان ت × ٹان ٹ} (۹۰)]
 وہ نہایت کم ہی اور جس قدر کہ زاویہ بڑھ گیا اور مقدار اسکے سن میں زیادتی نہیں ہوتی اسلئے
 اس حالت میں سن ت کا مقدار بذریعہ نقشون لوگارثم کے نہایت صحیح نہیں نکل سکتا بہتر
 طریقہ واسطے دریافت کرنے زاویہ ت کے ایسی حالت میں یہ ہوگا کہ اول لمبائی ٹ کے معلوم
 کر لیا جائے اور بعد ازاں اسکے کوسا میں سے زاویہ ت معلوم کر لیا جائے مثلاً۔

$$\text{کوس ت} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ل}} \quad \text{ل کوس ت} = \text{ل پڑ} - \text{ل پڑ} + ۱۰$$

$$= \text{ل پڑ} (۱ - \text{ٹ} - \text{ٹ}) - \text{ل پڑ} + ۱۰$$

$$= \frac{1}{2} \{ \text{ل پڑ} (۱ + \text{ٹ}) + \text{ل پڑ} (۱ - \text{ٹ}) \} - \text{ل پڑ} + ۱۰$$

مثیل

۸۰

$$\text{ڈ} = ۳۶۵۶۱, \text{ٹ} = ۳۴۸۶۳ \text{ اس سے زاویہ ت نکالو}$$

(لوگارثم جو اس مثیل اور اور تمثیلوں میں استعمال ہو رہی ہیں تین صفحوں میں خمین لوگارثم کا
 ذکر ہے بعد شرح (۱) و (۲) ملین گے۔

$$\text{پہان ڈ} + \text{ٹ} = ۷۱۳۶۴ \text{ اور ڈ} - \text{ٹ} = ۱۶۶۸$$

ساوات مندرجہ بالا کے حل کرنے سے لپ ۱۳۵۳۳۳۳۱ = ۲۵۸۵۳۳۳۳۱

$$۲۵۸۵۳۳۳۳۱ = ۱۳۵۳۳۳۳۱ \text{ لپ}$$

$$۱۵۲۲۵۳۰۹۳ = ۱۶۵۸ \text{ لپ}$$

$$\begin{array}{r} ۳ \overline{) ۳۵۰۶۶۳۲۲} \\ ۱۰ \end{array}$$

$$۱۲۵۰۳۹۳۲۱۲$$

$$۲۵۵۶۲۳۱۱۸ = ۳۶۵۵ \text{ لپ}$$

$$\begin{array}{r} ۹۵۴۶۹۰۹۳ \\ ۹۵۴۶۹۳۸۰ \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{اور لکوس ۲، ۳۳} \\ \text{یہ شیج ۳ (۳) و تھیل ۳۳ مین ملگا} \end{array}$$

$$۲۸۶ = \text{حاصل تفریق}$$

$$۶۷۵۰۱۶ = \text{اور حاصل تفریق ۱ کا اس حالت مین}$$

$$\text{اور } \frac{۲۸۶}{۶۷۵۰۱۶} = ۴۲۶۶ = ۲۷۵ \text{ تقریباً}$$

ت = ۲، ۳۳، ۲۷۵ یعنی ۲، دگری ۳۳ منٹ اور غریب ۲۷۵ سکند کے

۲۔ اون مثلثون کے حل کرنیکی بیان مین چکاراویہ قائمہ نہیں ہے

۸۱۔ فرض کرو کہ کسی مثلث کے دو زاوئی اور اون زاویوں کے درمیان کا ضلع معلوم
ہیں یعنی (زاوے ت اور د اور ضلع ٹ)

چونکہ $ت + ز + د = ۱۸۰$ نیز $۱۸۰ - (ت + د) = ۱۸۰ - ۱۸۰ = ۰$ اس سے زاویہ ز نکلتا ہے

$$اور \text{ٹ} = \text{ٹ} + \frac{\text{سن ت}}{\text{سن ز}}$$

$$\therefore \text{ل پٹ} = \text{ل پٹ} + \text{ل سن ت} - \text{ل سن ز اس سے ٹ نکلتا ہے۔}$$

$$اور \text{ڈ} = \text{ٹ} + \frac{\text{سن د}}{\text{سن ز}}$$

$$\therefore \text{ل پڈ} = \text{ل پٹ} + \text{ل سن د} - \text{ل سن ز اس سے ڈ نکلتا ہے۔}$$

اگر $ت + د$ چھوٹا ہی ۹۰ ڈگری سے تو مقدار ز کا دریافت کرنا واسطے معلوم کرنے کا طریقہ
ڈ کے مطلوب نہیں ہے۔

$$\text{کیونکہ سن ز = سن } \{ ۱۸۰ - (ت + د) \} = \text{سن } (ت + د)$$

$$\therefore \text{ل پٹ} = \text{ل پٹ} + \text{ل سن ت} - \text{ل سن } (ت + د)$$

$$اور \text{ل پڈ} = \text{ل پٹ} + \text{ل سن د} - \text{ل سن } (ت + د)$$

۸۲- فرض کرو کہ د و زاوی اور ایک ضلع مقابل کسی ایک ان زاویوں کا معلوم ہیں

یعنی (زاویہ ستم د اور ضلع ٹ)

$$\text{تو ز} = ۱۸۰ - (ت + د) \text{ اور } \text{ٹ} = \frac{\text{سن ز}}{\text{سن د}}$$

$$\therefore \text{ل پٹ} = \text{ل پٹ} + \text{ل سن ز} - \text{ل سن ت}$$

$$= \text{ل پٹ} + \text{ل سن } (ت + د) - \text{ل سن ت}$$

اور ڈ = ٹ × $\frac{\text{سن د}}{\text{سن ت}}$ ∴ لیڈ = لیٹ + ل سن د - ل سن ت
 ۳۴ - فرض کرو کہ دو اضلاع اور زاویہ درمیانی ان اضلاع کا معلوم ہیں
 یعنی (ڈ ت ٹ)

اول جزون معلومہ سے زاویہ ز و د معلوم کرو

$$ز + د = ۱۸۰ - ت \quad \therefore \frac{1}{2}(ز + د) = \frac{1}{2}(۱۸۰ - ت)$$

$$\text{اور } \frac{\text{سن ز}}{\text{سن د}} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}} \quad \therefore \frac{1 - \frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}}}{1 + \frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}}} = \frac{1 - \frac{\text{سن ز}}{\text{سن د}}}{1 + \frac{\text{سن ز}}{\text{سن د}}}$$

$$\therefore \frac{\text{ٹ} - \text{ڈ}}{\text{ٹ} + \text{ڈ}} = \frac{\text{سن ز} - \text{سن د}}{\text{سن ز} + \text{سن د}} = \frac{\text{ٹان } \frac{1}{2}(ز - د)}{\text{ٹان } \frac{1}{2}(ز + د)} \dots \dots (دفعہ ۵۲)$$

$$\text{اور ٹان } \frac{1}{2}(ز + د) = \text{ٹان } \frac{1}{2}(۱۸۰ - ت) = \text{کوٹ } \frac{1}{2} ت$$

$$\therefore \text{ٹان } \frac{1}{2}(ز - د) = \frac{\text{ٹ} - \text{ڈ}}{\text{ٹ} + \text{ڈ}} \times \text{کوٹ } \frac{1}{2} ت$$

$$\therefore \text{ل ٹان } \frac{1}{2}(ز - د) = \text{لی } \frac{1}{2}(ز - د) - \text{لی } \frac{1}{2}(ز + د) + \text{ل کوٹ } \frac{1}{2} ت \dots \dots (۲)$$

$\frac{1}{2}(ز - د)$ اوپر کی مثالوں سے معلوم ہوا اور $\frac{1}{2}(ز + د)$ معلوم ہے -

$$\left\{ \begin{array}{l} ز = \frac{1}{2}(ز + د) + \frac{1}{2}(ز - د) \\ د = \frac{1}{2}(ز + د) - \frac{1}{2}(ز - د) \end{array} \right. \text{ایسے ز اور د معلوم ہوگی}$$

اور ٹ = ڈ × $\frac{\text{سن ت}}{\text{سن د}}$ اس سے ٹ نکلتا ہے

- اگر (ڈ ت ٹ) معلوم ہوں تو ٹ بلا معلوم کرنے ز اور د کے معلوم

معلوم ہو سکتا ہے۔

کیونکہ $\frac{r}{r} = \frac{r}{r} + \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \times \frac{r}{r}$ کوست

$$= z^1 + z^2 - z^2 \times z^1 - (z^2 - z^1) \times z^1 \dots \dots \dots \text{دفعه ۳۹ (۳)}$$

$$= (r - u) + m \times r + n \times u$$

$$\left\{ \sin \times \frac{r \times r}{r - r} + 1 \right\} \times (r - r) =$$

$$\left\{ \left(\sqrt{\frac{2 \times 3}{2-1}} \right) + 1 \right\} \times (2-1) =$$

اب $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$ سن پلٹ کسی مقدار اور کسی علامت کا ہو سکتا ہے اور

اس لیے کسی نکسی زاویہ کا ٹانجٹ اس مقدار کے برابر ہے فرض کہ وہ زاویہ یہ ہے

تومان ۸ = $\frac{r_1 r_2 \sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ سس $\frac{1}{x}$ ت (۱)

$$8 \times (7 - 3) = (8 + 1) \times (7 - 3) = 9 \times 4$$

$$(2) \dots \dots \dots \times (2-1) = 1 \therefore$$

(۱) سے ل تا ن = ۴ = ل۲ + ل۱ ل۲ + ل۱ ل۲ - ل۱ (ر - ڈ) + ل۱ سن ل۱ ت

$$= \frac{1}{2} (\text{لبؤر} + \text{لبؤڈ}) + \text{لبؤ} + \text{لسن} - \text{لبؤر} - \text{لبؤڈ}$$

اس مساوات سے ۸ نکلتا ہے

(۲) ے لپٹ = لپ (ز-ٹو) + ل سک ۸-۱۰ اس سے ٹ نکلتا ہے

۷۴۔ فرض کرو کہ مینون اضلاع ثلث کے معلوم ہیں یعنی (ٹ، ر، ڈ)

$$\text{اب سن ت} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \{ \text{س} (\text{س} - \text{ٹ}) (\text{س} - \text{ر}) (\text{س} - \text{ڈ}) \}$$

$$\text{سن } \frac{1}{2} \text{ ت} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (\text{س} - \text{ٹ}) (\text{س} - \text{ر}) (\text{س} - \text{ڈ})$$

$$\text{کو س } \frac{1}{2} \text{ ت} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (\text{س} - \text{ٹ}) (\text{س} - \text{ر}) (\text{س} - \text{ڈ})$$

$$\text{ٹمان } \frac{1}{2} \text{ ت} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (\text{س} - \text{ٹ}) (\text{س} - \text{ر}) (\text{س} - \text{ڈ}) *$$

اگر زاویہ درمیانی سے قاعدہ پر باقاعدہ کے کسی طرف کے بڑھائی ہوئی حصہ پر ایک عمود ڈالا جاوے تو اشکال ۱۲ و ۱۳ مقالہ دوم کے نتائج سے ظاہر ہو سکتا ہے کہ

قاعدہ

: حاصل جمع دو اضلاع

:: حاصل تفریق دو اضلاع

: حاصل تفریق یا حاصل جمع قاعدہ کے دو ٹکروں کے

اس تناسب کے چوتھی جزو میں حاصل جمع او س وقت ہوگا جب عمود قاعدہ کے بڑھائی ہوئے حصہ کو قطع کرتا ہے اور حاصل تفریق او س وقت ہوگا جب عمود قاعدہ کو بلا برہانے کے جبکہ مین اضلاع ایک ثلث کے معلوم ہوں تو ثلث مذکور کو دو مثلثوں قائمہ الزاویہ میں تقسیم کر کے رت کا دریافت کرنا زیادہ سہل ہوگا نسبت اس قاعدہ سے جو کہ کتاب میں دیا گیا ہے +

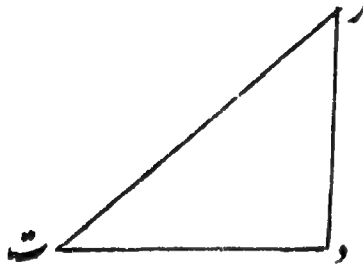
قطع کرتا ہے۔

ت ب = (ت ر ± رب) اس مساوات سے چوتھا جزو دریافت ہونے پر کوس
ت جو برابر ہے $\frac{ت}{ب}$ کے معلوم ہو سکتا ہے۔

۸۸۔ یاد رکھنا چاہیے کہ اگر ت قریب ۹۰ کے ہو تو اول قاعدہ دفعہ ۸۷ سے ت کا مقدار
بہت صحیح معلوم نہوگا کیونکہ اس حالت میں سن ت میں جو تھوڑی زیادتی ہوئی وہ اس قدر
نہیں گشتی بڑھتی ہے جیسا زیادتی زاویہ ت کے ا در بہت کم ہی ہے (شرح ۳ دفعہ ۸۸)
اس حالت میں کوئی قاعدہ تین قاعدوں سے مستعمل ہو سکتا ہے دوسرا اور تیسرا قاعدہ
اوس وقت استعمال کرنا چاہیے جب کوس $\frac{ا}{ب}$ یا سن $\frac{ا}{ت}$ بڑا ہو یعنی جبکہ
 $\frac{ا}{ب}$ ت خواہ چھوٹا ہو یا بڑا ہو ۴۳ سے (۶۳) قاعدہ چوتھا ہر حالت میں مستعمل ہو سکتا ہے
سوائے اوس حالت کے جبکہ $\frac{ا}{ب}$ ت برابر ہے قریب ۹۰ کے (۶۲)
مثال ۱۔

۸۹ اگر کوئی شے زبط طور عمود کسی سطح ہموار پر قائم ہو تو اس کی اونچائی بذریعہ نائپر کسی خطب و
کوجو کہ اوس سطح پر واقع ہو اور جسکو قاعدہ ہی کہتے ہیں اور بذریعہ نائپنے زاویہ رب و کو دیا ہو سکتی ہے
* سطح ہموار سے بیان وہ سطح مراد ہے جو افق کے متوازی ہو یعنی جو متوازی ہو اوس دائرہ کے جسکو ہم نوک
اپنے چاروں طرف دیکھتے ہیں اور جان معلوم ہوتا ہے کہ آسمان زمین سے مل گیا ہے۔

ناپنے کسی خط د کے جو کہ اسی سطح پر واقع ہے اور جس کو قاعدہ ہی کہتے ہیں اور
بذریعہ ناپنے زاویہ رت د کے دریافت ہو سکتی ہے۔

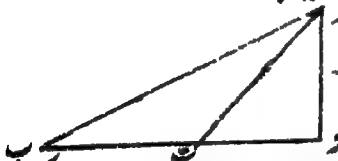


کیونکہ $ر د = ت$ و $ل ثمان رت د$

∴ $ل ر د = ل ر ت د + ل ثمان رت د - ۱۰$

مثال ۲

اگر شے مذکور کی پائین تک پہنچنا غیر ممکن ہو تو قاعدہ ب ت کو اس طرح سے ناپ لو کہ
تقاطع رت د ایک ہی نقطہ مستقیم میں ہوں اور زاویہ ب ت رت رت د کو
ناپ لو تو اس سے اونچائی شے مذکور کی معلوم ہو جائیگی۔



یہاں ہوا دے اور ایک ضلع ثلث رت ب کے معلوم ہیں پہلے ضلع رت کو
دریافت کر لو اور تب ضلع رو کی اونچائی ثلث رت د قایمہ الزاویہ کے معلوم

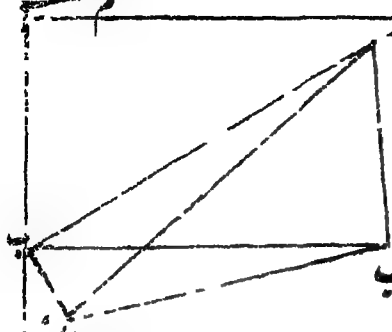
ہو سکتی ہے اس طرح سے $\frac{سن رت ب}{سن رت د - رت ب} = \frac{سن رت ب}{سن رت ب} = \frac{ت ب}{سن رت ب}$

اور $رو = رت \times سن رت د = ت ب \times \frac{سن رت ب}{سن رت د - رت ب}$

∴ $ل ر د = ل ر ت ب + ل سن رت ب + ل سن رت د - ل سن رت د - رت ب - ۱۰$

مثال ۳

اگر ب خط د میں نہ تو ب بھی اونچائی رو کے معلوم ہو سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ نقطہ ت کو زاویہ رشتا و درت ب
ناپی کی ہیں اور نقطہ ب پر کا زاویہ رب ت ناپا گیا ہو
چونکہ Δ رب ت میں زاویہ رب ت درت ب اور ضلع ت ب

معلوم ہیں اگر رت ان خبروں معلومہ سے دریافت کیا جاسکتا ہو تو رد بذریعہ مثلث قائمہ الزاویہ
رت د کے معلوم ہو سکتا ہے

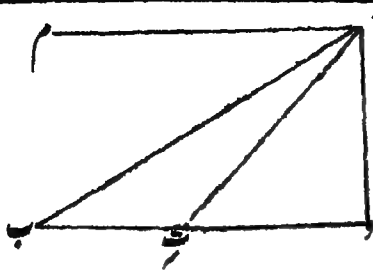
$$\frac{\text{سن رب ت}}{\text{سن لرب ت}} = \frac{\text{سن رب ت}}{\text{سن رب ت}} = \frac{\text{اسطر حسی ت ب}}{\text{سن لرب ت}} \\ \therefore \text{رب ت} = \text{سن لرب ت} \times \frac{\text{سن رب ت}}{\text{سن (رب ت + رت ب)}}$$

$$\text{اور رد} = \text{رت} \times \text{سن رت} = \text{سن رب ت} \times \frac{\text{سن رب ت} \times \text{سن رت}}{\text{سن (رب ت + رت ب)}} \\ \text{ل۔ د} = \text{ل ب ت} + \text{ل سن رب ت} + \text{ل سن رت} = \text{ل سن (رب ت + رت ب)}$$

ظاہر ہے کہ ب کا واقع ہونا باہر اوس سطح ہموار کے جسمین نفاذات اور واقع ہیں رد کی
دریافت کرنے میں نقطہ ت سے ناپ لیا جاوے اور زاویہ جات رت و رت ب
رب ت ناپ لیے جاوین تو اوس سطح ہموار سے جسمین نفاذات اور واقع ہیں
ادنیائی نقطہ کی دریافت کر نہیں یہ معلومات کافی ہونگے۔

مثال ۳

ایک مکان رد کے چہت پر سے جسکی ادنیائی معلوم ہے ایک دریامی ت ب کی



چوڑائی دریافت کرنا ہے۔

نقطہ سے ایک خط ر م و ب کا

متواری کینچو اور زاوے م ر ب اور م ر ت دریا

کر لو تو زاویہ م ر ب = زاویہ ر ب و ا و ر زاویہ م ر ت = ر ت و ا و ر

$$\text{ب ت} = \text{ر ت} \times \frac{\sin \text{ب ر ت}}{\sin \text{ر ب ت}}$$

$$= \text{ر ت} \times \frac{\sin (\text{ر ت} - \text{ر ب ت})}{\sin \text{ر ب ت}}$$

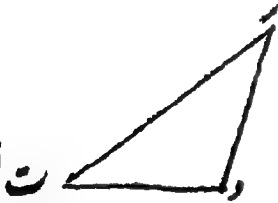
$$= \frac{\sin \text{ر ت} \times \text{ر}}{\sin \text{ر ب ت}} \times \frac{\sin (\text{ر ت} - \text{ر ب ت})}{\sin \text{ر ب ت}}$$

مثال ۵

جس قدر کہ غلطی اونچائی میں ہوئی ہو بسبب واقع ہونے سے تھوری غلطی زاویہ کو دیکھنے میں

اوسکو دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ر و = و یعنی اونچائی



$$\text{ت} = \text{و}$$

$$\text{زاویہ ر ت و} = \text{ٹ}$$

فرض کرو کہ کہ غلطی اونچائی کی ہے اور ط غلطی زاویہ کی ہے۔

تو $\theta = \angle$ ثمان ت اور $و + ک = \angle$ ثمان (ت + ط)

بک $= \angle$ ث $\times \{ \angle$ ثمان (ت + ط) $\} - \angle$ ثمان ت

$$\theta = \frac{\angle \text{سن} \times (\angle \text{ت} + \angle \text{ط})}{\angle \text{کوس} (\angle \text{ت} + \angle \text{ط})} - \frac{\angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{کوس} \text{ت}}$$

$$\theta = \frac{\angle \text{سن} (\angle \text{ت} + \angle \text{ط}) \times \angle \text{کوس} \text{ت} - \angle \text{کوس} (\angle \text{ت} + \angle \text{ط}) \times \angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{کوس} (\angle \text{ت} + \angle \text{ط}) \times \angle \text{کوس} \text{ت}}$$

$$\theta = \frac{\angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{کوس} \text{ت}} \times \angle \text{کوس} \text{ت} - \angle \text{کوس} \text{ت} = \angle \text{کوس} \text{ت} (\angle \text{سن} \text{ت} - \angle \text{کوس} \text{ت})$$

جبکہ ط بہت چوٹا ہے (۶۰)

حاصل

اس سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کس وقت وہ غلطی جو اونچائی میں ہوتی بسبب واقع ہونے لگی غلطی زاویہ کے دیکھنے میں نہایت کم ہوگی۔

$$\text{کیونکہ ک} = \theta = \frac{\angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{کوس} \text{ت}} = \frac{\angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{کوس} \text{ت}} \times \frac{\angle \text{ثمان} \text{ت}}{\angle \text{ثمان} \text{ت}} = \frac{\angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{کوس} \text{ت}} \times \frac{\angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{سن} \text{ت}} = \frac{\angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{کوس} \text{ت}} = \frac{\angle \text{سن} \text{ت}}{\angle \text{کوس} \text{ت}}$$

بیان و یعنی اونچائی بلا تبدیل ہے اور ط معلوم ہی مقدار بالا جو اونچائی کی غلطی ہے

اوس وقت اقل ہوگی جب سن ات سب سے بڑا ہوگا یعنی جب $\angle \text{ت} = ۹۰$ یا $\angle \text{ت} = ۰$

اس لیے پیمائش کنندہ کو چاہیے کہ قاعدہ کے برابر اتنی دور تک چلے جب تک کہ زاویہ رت

$$= \frac{1}{2} \times \text{سن} \times \text{سن} \times \text{سن}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{سن} \times \text{سن} \times \text{سن}$$

اس سبب سے کہ سن ت = سن ۱۰ - (ر + و) = سن (ر + و) کے
 ۹۲ - اون دائروں کے نصف القطر کو دریافت کرو جو کسی شکل کثیر الاضلاع مساوی
 اندر اوکڑو کہینے پر گئی ہیں شکل مذکور ایسے شکل ہے جسکی اضلاع اور زاویہ پسمین برابر
 فرض کرو کہ ت ر ایک ضلع ہے اوس شکل کثیر الاضلاع اور مساوی الخطین کا کہ جس کے
 اضلاع کا شمار ن ہے۔

چونکہ شکل مذکور ایسی شکل ہے جس کے اضلاع اور زاویہ پسمین برابر ہیں اسلئے ایک دائرہ
 اوس کے اندر کہیں جا سکتا ہے اور ایک دائرہ اوس کے گرد اور ہر ضلع کے لئے مرکز
 عام پر کا زاویہ ایک ہی ہے۔

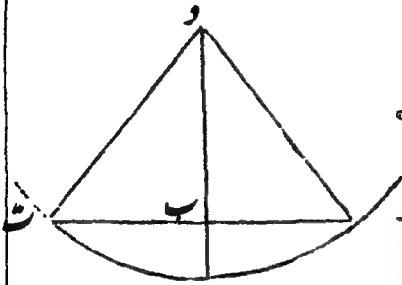
نقطہ دسے دب ایک عمودت پر گر آو تو ت ب = ب ر اور دب نصف قطر ہے
 اوس دائرہ کا جو شکل مذکور کے اندر کہینے گیا ہے فرض کرو کہ ت = دب اور ر = دب
 چونکہ حاصل جمع دہر کے سب زاویہ نکا = ن ۶۰ ت ور = ۶۰ ڈگری

$$= \frac{360}{ن} = \text{زاویہ ت دب} = \frac{1}{2} \times \text{ت ور} = \frac{۶۰}{ن}$$

$$\text{اور } \frac{ت دب}{ن} = \text{ثابت دب}$$

ب = د = ت = ب × کوٹ ت د ب

$$= \frac{1}{2} \times \text{ت} \times \text{کوٹ} = \frac{1}{2} \times ۱۵۰ \times ۱۰۰ = ۷۵۰۰$$



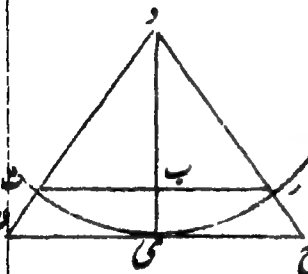
$$= \frac{1}{2} \times \text{ت} \times \text{کوٹ} = \frac{1}{2} \times ۱۵۰ \times ۱۰۰ = ۷۵۰۰$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ت} \times \text{کوٹ} = \frac{1}{2} \times ۱۵۰ \times ۱۰۰ = ۷۵۰۰$$

۹۳۔ جو کثیر الاضلاع مساوی الخطین کسی دائرہ کے اندر یا باہر کھینچے ہیں اور

نصف قطر معلوم ہے اوس کے اراضی دریافت کرو

فرض کرو کہ ت می رفوس ہے اوس دائرہ کا جکا



مکڑ دہے اور ت ایک ضلع ہی اوس کثیر الاضلاع مساوی الخطین

کا جسے ضلع کا شمار نہ ہو اور جو اوس دائرہ کے اندر کھینچی گئی ہے

اور دیات پر عمود واقع ہو کر ت کے تصیف کرتا ہے

اور ت ج خطا میں ہی جو دائرہ کو نقطہ می سے چوتھا ہی اور ملتا ہی خط و ت سے

نقطہ و ت پر اور خط و سے نقطہ ج پر تو ت ج ایک ضلع ہے اوس شکل کثیر الاضلاع

مساوی الخطین کا جو دائرہ مذکور کے باہر کھینچی گئی ہے اور یہ بھی فرض کرو کہ ت = ت

$$\text{ت} = \text{م} = \text{ت} = \text{ب} = \text{م} \times \text{سن ت د ب}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ت} \times \text{سن} = \frac{1}{2} \times ۱۵۰ \times ۱۰۰ = ۷۵۰۰$$

منج = م ف می = م دی × ثان می دف = م × ثان $\frac{۱۸۰}{ن}$
 ت = اراضی اوس شکل کثیر الاضلاع والزاویہ جو دائرہ کے اندر کمینچی گئی ہے
 = ن × ل د ت ر

= ن × دت × در × سن ت در = $\frac{ن}{۴} \times ثمر \times سن \frac{۳۶۰}{ن}$
 ت = اراضی اوس شکل کثیر الاضلاع والزاویہ جو دائرہ کے باہر کمینچی ہے۔
 = ن × ل د ف ج

= ن × دی × ف می = ن × ثمر × ثان $\frac{۱۸۰}{ن}$
 حاصل۔ ان اراضیوں کو بموجب مفصلہ ذیل ایک دوسرے سے تشبیہ ہو سکتی ہیں
 اراضی اوس شکل کثیر الاضلاع والزاویہ جو دائرہ کے اندر کمینچی گئی ہے۔
 اراضی اوس شکل کثیر الاضلاع والزاویہ جو دائرہ کے باہر کمینچی گئی ہے۔
 $\frac{ل د ت ب}{ل د ف می} = \frac{ل د ت ب}{ل د ف می}$ اسلئے

کہ تسلسل اسی میں متساوی ہیں

$$= \left(\frac{د ت ب}{د ف می} \right) = \text{کوس } \frac{۱۸۰}{ن}$$

۹۴۔ ایک شکل کثیر الاضلاع مساوی الخطین کے اراضی جس کے ضلعوں کا شمارن ہے بنا
 کسی ضلع شکل مذکور کے نکالو (شکل دفعہ ۹۴ کے دیکھو)
 ت ر ایک ضلع شکل کثیر الزاویہ و اضلاع مذکور کا ہے۔

$$\text{رائی} = \text{ن} \times \text{ل} = \text{ت} \times \text{ر} = \text{ن} \times \frac{1}{2} \times \text{ت} \times \text{ر} \times \text{ب} \times \text{د}$$

$$\frac{1}{2} \times \text{ن} \times \text{ت} \times \text{ر} \times \text{ب} \times \text{کوٹ} \times \text{ت} \times \text{د} \times \text{ب}$$

$$\frac{1}{2} \times \text{ن} \times \text{ت} \times \text{ر} \times \frac{1}{2} \times \text{ت} \times \text{ر} \times \text{کوٹ} \times \frac{1}{2} \times \text{ن}$$

$$\frac{1}{2} \times \text{ن} \times (\text{ت} \times \text{ر}) \times \text{کوٹ} \times \frac{1}{2} \times \text{ن}$$

۹۵۔ اون دائروں کے نصف القطرون کو دریافت کرو جو ایک مثلث کو اندر آواہ

جسکے اضلاع معلوم ہیں کیونچے گئی ہیں۔

فرض کرو کہ وہ خطوط جو زاویہ جات ت ر کے تنصیف کرتے ہیں نقطہ م میں ایک

سے سے ملتی ہیں م سے م ب م ی م ی م ف عمودہ مثلث کے ضلعوں پر گراؤ

زیر وجہ شکل چہارم متوالہ چہارم کے م مرکز ہی اوس دائرہ کا جو مثلث کے اندر

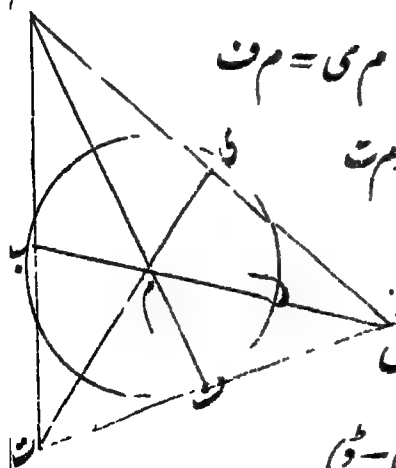
میں چسپا گیا ہے اور اوسکا نصف القطر ت ر = م ب = م ی = م ف

ہے کہ راضی لے ت ر د = لے ت م ر + لے ر م د + لے د م ت

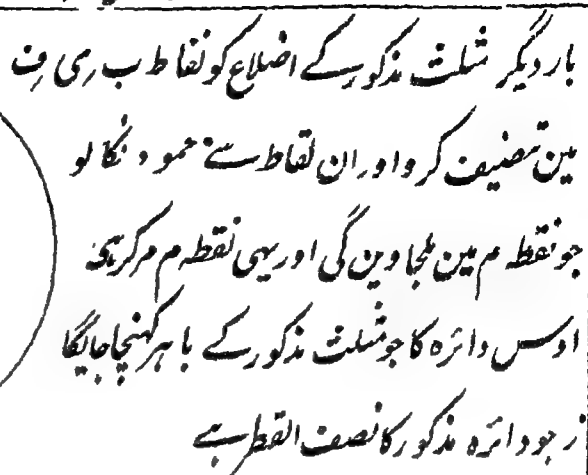
$$\therefore \text{الہو س (س-ٹ)} \times (\text{س-ٹ}) \times (\text{س-ٹ}) = (\text{س-ٹ}) \times (\text{س-ٹ}) \times (\text{س-ٹ})$$

$$= \text{ٹ} \times \frac{1}{2} \times \text{ٹ} + \text{ٹ} \times \frac{1}{2} \times \text{ٹ} + \text{ٹ} \times \frac{1}{2} \times \text{ٹ} = \text{ٹ} \times \text{س}$$

$$\therefore \text{ٹ} = \sqrt{(\text{س-ٹ}) \times (\text{س-ٹ}) \times (\text{س-ٹ})}$$



(۱).....



اور: $t = \frac{1}{\mu} \text{ رم}$ (شکل ۲۰ مقالہ سوم)

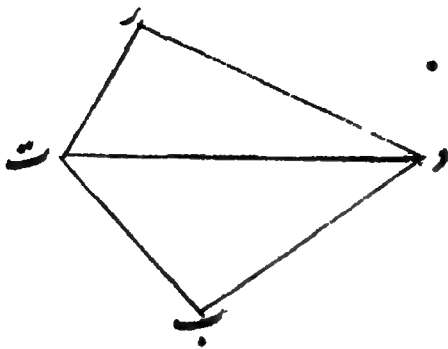
اسی لیے بموجب دفعہ ۶، $\frac{r}{r \times \frac{r}{2}} \times \{s(س-ٹ) \times (س-ز) \times (س-و)\}$

$$= \frac{1}{2} \{ (s - t) \times (s - t) \times (s - t) \} \dots (2)$$

۹۶۔ ایک مثلث اربعۃ الاضلاع کے اراضی نکالو کہ جس کے مقابل کے زاوے

ایک دوسرے کے ضمیمہ ہیں۔ یعنی (تمامی و دو قائمہ)

ذیض کرو کہ ت ر و ب شکل اربعۃ الاضلاع ہے



یہ بھی فرض کرو کہ $ر = ث$

$ر = د$

$د = ب$

$ب = پ$

ت کو دست ملا دو

تو اراضی $ت ر د ب = ث ت ر د + ث ت ب د$

$= ث ر \times ث + ث سن ر + ث د \times پ \times سن ب$

$= ث (ث ر + د \times پ) \times سن ر$ اسلئے کہ

$سن ب = سن (ب - ۱) = سن ر$

اب $ث ت ر د$ سے $ر ث + ث ر - ث = د = ث م$ $م = ث ر \times کو س ر$

اور $ث ت ب د$ سے $ر د + د ب - پ = ت = د = ث م$ $م = ث پ \times کو س ب$

$= - م = ث د \times پ \times کو س ر$

اسلئے ان دونوں کو ضریق کرنے سے

$ث ر + ث ر - د - پ = م = ث (ث ر + د \times پ) \times کو س ر$

$بیس ر = ۱ - کو س ر = ۱ - \frac{ث (ث ر + د \times پ) \times کو س ر}{ث ر + ث ر - د - پ}$

$$= \frac{۳ (رٹ \times ط + ڈ \times پ) - (رٹ + ط + ڈ - پ)}{۳ (رٹ + ط + ڈ \times پ)}$$

اور (ارضی ت ر و ب) = $\frac{۱}{۴} (رٹ \times ط + ڈ \times پ) \times سن$

$$\therefore \frac{۱}{۱۶} = \{ ۳ (رٹ \times ط + ڈ \times پ) - (رٹ + ط + ڈ - پ) \} \times سن$$

$$= \frac{۱}{۱۶} \{ ۳ (رٹ \times ط + ڈ \times پ) + (رٹ + ط + ڈ - پ) \}$$

$$= \frac{۱}{۱۶} \{ ۳ (رٹ + ط + ڈ - پ) + (رٹ + ط + ڈ \times پ) \}$$

$$= \frac{۱}{۱۶} (رٹ + ط + ڈ \times پ) \times (رٹ + ط + ڈ - پ) + (رٹ + ط + ڈ \times پ) \times (رٹ + ط + ڈ - پ)$$

اور اگر س = $\frac{۱}{۴} (رٹ + ط + ڈ \times پ)$

ارضی ت ر و ب = $\frac{۱}{۴} (رٹ + ط + ڈ \times پ) \times (رٹ + ط + ڈ - پ) \times سن$

۹۷۔ کسی مساوات میں جبرون غیر معلومہ کا معلوم کرنا حاصل ہو سکتا ہے اگر مساوات

مذکورہ کو بذریعہ تناسبات مساح الزاویہ کے دو اور مساواتوں میں منقصہ کم کر دو البتہ

دفعات ۳ و ۴ میں متعلیٰ ہوا ہے اور تشیلات مندرجہ ذیل اب ہم سہرسترا و بین

ا اگر رٹ ط لا معلوم ہوں تو سن ٹ = کو سن ل کو سن ل کو سن ل کو سن ل کو سن ل

کو ایسی صورت میں جس میں قاعدہ لوگا رثم کے مستعمل ہو سکیں۔

مساوات اس طرح لکھے جاسکتے ہیں

$$سن ٹ = سن ل \times اسن ل - کو سن ل - کو سن ل$$

اب چونکہ مانجھٹ ہر مقدار اور علامت کے ہین ایسے کوئی زاویہ ع ایسا ہو سکتا ہی کہ

$$\frac{\text{کوس ل} \times \text{کوس ط}}{\text{کوس لا}} = \frac{\text{سن ع}}{\text{کوس ع}}$$

$$\text{کوسٹ لا} \times \text{کوس ط} = \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{سن ع} = \text{کوس لا} \times (\text{سن ل} + \text{کوس ل} \times \frac{\text{سن ع}}{\text{کوس ع}})$$

$$\frac{\text{سن لا}}{\text{کوس ع}} = \frac{\text{سن ل}}{\text{کوس ل}} + \text{کوس ل} \times \frac{\text{سن ع}}{\text{کوس ل} \times \text{کوس ع}}$$

$$\frac{\text{سن لا}}{\text{کوس ع}} = \frac{\text{سن ل}}{\text{کوس ل}} + \text{سن (ل + ع)}$$

$$\text{سن ل + ع} = \frac{\text{سن ٹ} \times \text{کوس ع}}{\text{سن لا}} \dots\dots\dots (۲)$$

۱۔ سے ل ٹان ع = ل کوٹ لا + ل کوس ط - ۱۰ اس سے ع نکلتا ہے

$$(۲) \text{ سے ل سن ل + ع} = \text{ل سن ٹ} + \text{ل کوس ع} - \text{ل سن لا}$$

اس سے ل + ع نکلتا ہے اور تب ل نکلتا ہے

$$(۳) \text{ ٹ} \times \text{کوس کا} + \text{ٹر} \times \text{کوس (کا + ط)} = \text{کوس رر} + \text{کا} \text{ ظاہر کر۔}$$

$$\text{فرض کرکہ} = \text{ٹ} \times \text{کوس کا} + \text{ٹر} \times \text{کوس (کا + ط)}$$

$$= \text{ٹ} \times \text{کوس کا} + \text{ٹر} \times \text{کوس ٹ} \times \text{کوس کا} - \text{ٹر} \times \text{سن ط} \times \text{کوس کا}$$

$$= \text{ٹ} \times (۱ + \frac{\text{ٹ}}{\text{کوس ط}} \times \text{کوس ط}) \times \text{کوس کا} - \text{ٹر} \times \text{سن ط} \times \text{کوس کا}$$

فرض کرکہ ع وہ زاویہ ہو جسکا مانجھٹ $\frac{\text{ٹ}}{\text{کوس ط}}$ کوس ط ہی یعنی ٹانجھٹ = $\frac{\text{ٹ}}{\text{کوس ط}}$ (۱)

(۳) دے کون زاوے ہین بنکے ٹانجنٹ کے مقادیر دے ہین جو۔ ۱۱۰ کے ٹانجنٹ

کا ہے مگر مختلف علامت ہین جواب ۱۱۰، ۲۹۰، ۲۷۰، ۲۵۰، ۲۳۰ اور ۱۱۰، ۱۳۰، ۱۵۰، ۱۷۰، ۱۹۰، ۲۱۰

یہ زاویہ جات صورت م $110^\circ + 180^\circ \times$ سے نکلے ہین جہین م ۰ ہے یا کوئی مثبت یا منفی عدد صحیح ہے۔

۵۔ مفصلہ ذیل کے صورتوں کو ثابت کرو

$$(۱) \text{ سکت } ۱ \times \text{ کو سکت } ۲ = \text{ سکت } ۳ + \text{ کو سکت } ۴$$

$$(۲) \text{ کوٹ } ۱ \times \text{ کو سکت } ۲ = \text{ کوٹ } ۳ - \text{ کو سکت } ۴$$

$$(۳) \text{ کو سکت } ۱ = \frac{\text{کوٹ } ۱}{(۱ + \text{کوٹ } ۲)} \quad (۴) \text{ ورسن } ۱ = \frac{\text{سکت } ۱}{\text{سکت } ۲}$$

$$(۵) \text{ سن } ۱ \times \text{ کو سکت } ۲ = \frac{۱}{\text{ٹان } ۱ + \text{کوٹ } ۲}$$

$$(۶) \text{ اگر ٹان } ۱ \text{ ت } ۳ \text{ سن } ۱ \text{ ت } ۴ = \text{ قوت } ۶ = ۶۰$$

$$(۷) \text{ اگر م } ۱ = \text{ ٹان } ۱ \text{ ت } ۳ \text{ سن } ۱ \text{ اور ن } ۱ = \text{ ٹان } ۱ \text{ ت } ۴ \text{ کو سکت } ۲ = \frac{\text{م } ۱ - \text{ن } ۱}{\text{م } ۱ + \text{ن } ۱}$$

$$(۸) \text{ اگر م } ۲ \times \text{ سن } ۲ = \text{ ن } ۲ \times \text{ کو سکت } ۲ \text{ تو سن } ۲ = \frac{\text{ن } ۲}{\text{م } ۲ + \text{ن } ۲}$$

$$(۹) \text{ اگر } ۱ = \text{ سن } ۱ \text{ ت } ۲ + (\text{کو سکت } ۲ \times \text{ کو سکت } ۴) \text{ تو سن } ۱ = \frac{\text{ٹان } ۱ \text{ ت } ۲}{\text{ٹان } ۱ \text{ ت } ۴}$$

$$(۱۰) \text{ اگر کو سکت } ۱ = \frac{\text{کو سکت } ۲}{\text{سن } ۲} \text{ اور کو سکت } ۳ = ۹۰ - ۱۱۰ = \frac{\text{کو سکت } ۳}{\text{سن } ۳}$$

$$\text{تو کو سکت } ۱ \text{ ت } ۳ + \text{کو سکت } ۲ = ۱$$

۴۔ مندرجہ ذیل کے صورتوں کو ثابت کر کے دیکھلاؤ

$$(۱) \text{ٹان ت} + \text{کوٹ ت} = \text{م کو سک م ت}, (۲) \text{کوٹ ت} - \text{ٹان ت} = \text{م کوٹ م ت}$$

$$(۳) \text{ٹان ت} = \frac{\text{سک ت} + \text{کوٹ ت}}{۱ + \text{ٹان ت}} \quad (۴) \frac{۱ + \text{سک ت}}{۱ - \text{سک ت}} = \frac{۱ + \text{ٹان ت}}{۱ - \text{ٹان ت}}$$

$$(۵) \text{کو سک م ت} + \text{کوٹ م ت} = \text{کوٹ ٹ} (۶) \text{م کو سک م ت} = \text{سک ت} \times \text{کو سک ت}$$

$$(۷) \frac{\text{سک ت}}{۱ - \text{کوٹ ت}} = \text{کوٹ ٹ} \quad (۸) \frac{\text{ورسک ت}}{\text{ورسک (ٹان ت)}} = \text{ٹان ٹ}$$

$$(۹) \text{کوٹ م ت} \times \text{کو سک م ت} = \text{کوٹ ت} \times \text{کو سک ت} - \text{ٹان ت} \times \text{سک ت}$$

$$(۱۰) \text{ورسک (ٹان ت)} = \text{م ورسک ٹ} (۱۱) \text{م ورسک ٹ} \times \text{ورسک ٹ} = \text{ٹان ت}$$

$$(۱۱) \text{سک م ت} = \frac{\text{کوٹ ت} + \text{ٹان ت}}{\text{کوٹ ت} - \text{ٹان ت}} \quad (۱۲) \text{ٹان ٹ} = \frac{\text{سک ت} - \text{سک م ت}}{\text{سک ت} + \text{سک م ت}}$$

$$(۱۳) \text{کو سک م ت} = \frac{\text{کوٹ م ت} + \text{سک م ت}}{\text{کوٹ م ت} - \text{سک م ت}} \times \frac{\text{کوٹ ت} - \text{سک ت}}{\text{کوٹ ت} + \text{سک ت}}$$

$$(۱۴) \text{کو سک ٹ} = (\text{کوٹ ٹ} - \text{سک ٹ}) + (\text{م کوٹ ٹ} + \text{م کو سک ٹ}) \times \text{کوٹ ٹ} \times \text{سک ٹ}$$

$$(۱۵) \text{ٹان ٹ} = \frac{۱ + \text{سک ٹ}}{۱ - \text{سک ٹ}} \times \frac{۱ - \text{سک ٹ}}{۱ + \text{سک ٹ}}$$

اسی میں یہ بھی ظاہر کرو کہ علامت جذر کو اس مساوات میں ہیک ہی اگر ت در بیان
۹۰ اور ۹۱ کے ہو۔

$$(۱۶) \text{کوٹ ت} + \text{کوٹ م ت} + \text{کوٹ ٹ} = \frac{۱}{\text{سک ٹ}} \times (۲ + \text{م کوٹ م ت} + \text{م کوٹ ٹ})$$

$$(۱۷) \text{ثابت کرو کہ سک ٹ} = \frac{۱ - (\text{ٹان ٹ} \times \text{سک ٹ})}{۱ - (\text{ٹان ٹ} \times \text{سک ٹ})} = \frac{\text{ٹان ٹ} \times \text{سک ٹ}}{۱ - (\text{ٹان ٹ} \times \text{سک ٹ})}$$

اور اس سے ظاہر کرو کہ

$$\frac{(سک م ت - ۱) \times (سک م ت - ۲) \times \dots \times (سک م ت - ۱۰۰)}{(سک م ت - ۱) \times (سک م ت - ۲) \times \dots \times (سک م ت - ۱۰۰)} = کوٹ م ت مان (م ت)$$

$$(۱۸) کو سک م ت + کو س م ت = کوٹ م ت - کو سک م ت$$

$$(۱۹) س م ت \times س م ت + کو س م ت \times کو س م ت = کو س م ت$$

$$(۲۰) \frac{س م ت \times س م ت}{کو س م ت \times کو س م ت} = \frac{س م ت \times (ن + \frac{۱}{۲}) \times ت - سک م ت \times (ن - \frac{۱}{۲}) \times ت}{س م ت \times س م ت} \text{ اور اس سے ظاہر ہوگا}$$

$$کو س م ت + کو س م ت + \frac{س م ت}{کو س م ت + کو س م ت} + \frac{س م ت}{کو س م ت + کو س م ت} + \dots + \frac{س م ت}{کو س م ت + کو س م ت}$$

$$= \frac{س م ت \times س م ت \times (ن + \frac{۱}{۲}) \times ت}{س م ت \times س م ت \times (ن + \frac{۱}{۲}) \times ت}$$

۸۔ اگر زاویہ جات ز ر، د کسی مقدار کے ہوں تو مندرجہ ذیل کی مساواتوں کو ثابت کرو

$$(۱) کو س م ت + کو س م ت = م کو س (ت + ز) \times کو س (ت + ز)$$

$$(۲) ۱ + کو س م ت \times کو س م ت = م (س م ت \times س م ت + کو س م ت \times کو س م ت)$$

$$(۳) کو س (ت + ز) - س م ت = کو س ز \times کو س (م ت + ز)$$

$$(۴) \frac{س م ت \times س م ت}{س م ت \times س م ت} + \frac{س م ت \times س م ت}{س م ت \times س م ت} = \frac{س م ت \times س م ت}{س م ت \times س م ت}$$

(۵) کوس (ت + ز) × سن (ت - ز) + کوس (ز + د) × س (ز - د) + کوس

(د + ب) × س (د - ب) + کوس (ب + ت) × س (ب - ت) = ۰

(۶) کوس (ت + ز) × سن ز - کوس (ت + د) × سن د

= سن (ت + ز) × کوس ز - سن (ت + د) × کوس د

(۷) سن (ت + ز) × کوس ر - سن (ت + د) × کوس و = سن (ز - د) × کوس (ت + ز + د)

(۸) سن (ت + ز + د) × کوس ز - سن (ت + د + ر) × کوس د

= س (ز - د) × { کوس (ز + د - ت) + کوس (ت + د - ز) + کوس (ت + ز + د - ت) }

(۹) سن ت × سن (ز - د) + سن ز × سن (د - ت) + سن د × سن (ت + ر) = ۰

(۱۰) کوس ا ت + کوس ا ز + کوس ا د

= کوس (ز + د) × کوس (ز - د) + کوس (د + ت) × کوس (د - ت) + کوس (ت + ز) × کوس

(ت - ز) اور سن ا ت + سن ا ز + سن ا د

= سن (ز + د) × کوس (ز - د) + سن (د + ت) × کوس (د - ت) + سن (ت + ز) ×

کوس (ت - ز)

(۱۱) اگر م ص = ت + ر + د

تو ہم کوس ت × کوس ز + کوس و = کوس م (سن - ت) + کوس م (س - ز) + کوس م

کوس ۲ (س-ج) کو کوس ۲ س اور س کس ت ۱ سن ز ۱ سن د

= (سن ۲ (س-ت) ۱ سن ۲ (س-ز) ۱ سن ۲ (س-د) - سن ۲ س

(۱۲) سن ز ۱ سن (ت-ز) ۱ سن د ۱ سن (ت-د)

= کو بس (ز-د) ۱ کو س ۲ (س-ت) - کو س ت

(۱۳) (سن ت ۱ سن ز ۱ سن د) ۱ (سن ت-ز) ۱ سن (ر-د) ۱ سن (و-ت) ۱

= ۱ کو س ت - کو س (ر-د) ۱ کو س ۲ (س-ت) ۱ + ۱ کو س ز - کو س (د-ت) ۱ کو س ۲

(س-ز) ۱ کو س ۲ - کو س (ت-ز) ۱ کو س ۲ (س-د) ۱ کو س ۲ (س-ت) ۱ + ۱ کو س ۲ (س-ت) ۱

(۱۴) $\frac{\text{سن ت ز}}{\text{سن د}} + \frac{\text{سن ز د}}{\text{سن ت}} + \frac{\text{سن د ت}}{\text{سن ز}}$

+ $\frac{\text{سن ت ز}}{\text{سن د}} + \frac{\text{سن ز د}}{\text{سن ت}} + \frac{\text{سن د ت}}{\text{سن ز}} = ۰$

(۱۵) $\left(\frac{\text{ٹان ت}}{\text{ٹان ز}} - \frac{\text{ٹان ز}}{\text{ٹان د}} \right) + \left(\frac{\text{ٹان د}}{\text{ٹان ز}} - \frac{\text{ٹان ز}}{\text{ٹان د}} \right) + \left(\frac{\text{ٹان د}}{\text{ٹان ز}} - \frac{\text{ٹان ز}}{\text{ٹان د}} \right)$

= $\frac{\text{سن ۲ (ز-ت) ۱ سن ۲ (و-ز) ۱ سن ۲ (د-ت) ۱}}{\text{سن ۲ ت ۱ سن ز ۱ سن د}}$

سن ۲ ت ۱ سن ز ۱ سن د

(۱۶) قاعدہ مندرجہ (۱۵) کا اس مقدار کے بھی مساوی ہے

۱ سن (ت-ز) ۱ سن (ز-د) ۱ سن (د-ت) ۱

سن ۲ ت ۱ سن ز ۱ سن د

اور علامت ہارن مرتبہ تکرار کی گئی ہے اور ہر مرتبہ اپنی آگے کسی مقدار ون پر عمل کرتے ہے
۱۱۔ مندرجہ ذیل کے مساواتوں میں ت کو دریافت کرو یعنی اس کے مقدار نکالو

(۱) سن ت = سن م ت (۲) ٹان م ت = م ٹان ت (۳) ٹان ت = کوٹ م ت

(۴) کوٹ ت = ٹان ت (۵) ٹان م ت = م ٹان م ت (۶) ٹان ت = م کوٹ ت

(۷) ٹان ت x ٹان م ت = کوٹ ت = م (۸) م ٹان م ت = سن ت = ۲

(۹) ٹان ت + کوٹ م ت = سن ت (۱۰) ٹان ت x ٹان م ت =

(۱۱) کوٹ م ت = کوٹ (ن - م) x ت = کوٹ ت

(۱۲) اگر سن ت + سن م ت + سن م ت = توت کے مقابلہ میں $۱۰ \times (۱ + ۱۲) \times$

یا $۱۰ \times (۱ + ۱۲)$ ہیں انہیں ن کا عدد ۰ یا کوئی عدد صحیح ہے

(۱۳) اگر سن ت = سن م ت = توت = ن $۱۰ \times$ یا $(۱۲ \pm ۱) \times ۱۰$

اس میں ن ایک عدد صحیح ہے۔

(۱۴) اگر کوٹ م ت + سن م ت = توت = ن $۱۰ \times$ یا $۱۰ \pm ۱۲ \times$ ہیں ن کوئی عدد صحیح ہے

(۱۵) اگر ٹان (م - م) (م - م) + کوٹ (م - م) (م - م) = توت = ن $۱۰ \times$ یا $(۱۲ \pm ۱) \times ۱۰$ ہیں ن کوئی عدد صحیح ہے

(۱۶) اگر سن ۱۷ = سن ۱۶ کا تو ۱۷ = سن ۱۶ یا م ۱۶ = سن ۱۶ یا م ۱۶ = سن ۱۶

۱۲۔ مندرجہ ذیل کے مساواتوں میں سی کا مقدار دریافت کرو۔

$$(۱) \text{سن (ط-می)} = \text{کوس (ط+می)}$$

$$(۲) \text{سن (می+ط)} + \text{کوس (می+ط)} = \text{سن (می-ط)} + \text{کوس (می-ط)}$$

$$(۳) \text{سن ط+سن (می-ط)} + \text{سن (می+ط)} = \text{سن (می+ط)} + \text{سن (می-ط)}$$

$$(۴) \text{ٹان ط} \times \text{ٹان می} = \text{ٹان (ط+می)} - \text{ٹان (ط-می)} \text{ اس میں کوس می کا جواب نکالو}$$

$$(۵) \text{م} \times \text{وہسن می} = \text{ن} \times \text{ورسن (ط-می)}$$

$$(۶) \frac{\text{م} \times \text{ٹان (ط-می)}}{\text{کوس می}} = \frac{\text{ن} \times \text{ٹان می}}{\text{کوس (ط-می)}}$$

$$\text{جواب ٹان (ط-می)} = \frac{\text{ن} - \text{م}}{\text{ن} + \text{م}} \times \text{ٹان ط}$$

$$(۷) \text{ٹان (ط+می)} \times \text{ٹان (ط-می)} = \frac{۱ - \text{کوس ط}}{۱ + \text{کوس ط}} \text{ جواب می} = ۳۰$$

$$(۸) \text{ن} \times \text{سک می} \times \text{ٹان (ط-می)} = \text{م} \times \text{سک (ط-می)} \times \text{ٹان می} \text{ جواب ٹان می} = \frac{\text{م} \times \text{سک (ط-می)}}{\text{ن} \times \text{سک می}}$$

$$(۹) \text{سن می} = \text{سن ط} \times \text{سن (م+می)} \text{ جواب ٹان می} = \frac{\text{سن ط} \times \text{سن م}}{۱ - \text{سن ط} \times \text{کوس م}}$$

$$۱۰ \text{ ٹان می} = \text{کوس ط} \times \text{ٹان م} \text{ ظاہر کرو کہ}$$

$$\text{ٹان (م-می)} = \frac{\text{ٹان ط} \times \text{سن م}}{۱ + \text{ٹان ط} \times \text{کوس م}}$$

$$(۱۱) \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{\text{سن ط} \times \text{کوس (م+می)}}{\text{سن م} \times \text{کوس (ط-می)}} \text{ یہاں ٹان می کا جواب نکالو}$$

$$(۱۲) \text{اگر سن (می-ق)} = ۱ \text{ اور سن (می-ق)} = \text{کوس (می+ق)}$$

$$\text{قوی} = \text{ہم} \text{ اور ق} = \text{وا}$$

(۱۳) اگر کو ساین ع - ط ر ع اور ع + ط کے

تو کو س ع = م ط × کو س ۱/۲ ط

(۱۴) اگر ثمان می = $\frac{\text{سن ط} \times \text{کو س م}}{\text{سن م} + \text{کو س ط}}$

تو ثمان ۱/۲ می = ثمان ۱/۲ ط × ثمان (۱/۲ پ - ۱/۲ م)

$$\cdot = \frac{\text{سن م} \times (\text{ط} + \text{ع}) \times \text{کو س م}}{\text{کو س م} \times (\text{ع} - \text{ط}) \times \text{سن ط}} + \frac{\text{سن م} \times (\text{م} - \text{ط}) \times \text{کو س ط}}{\text{سن م} \times (\text{ع} - \text{ط}) \times \text{کو س م}} \quad (۱۵)$$

$$\cdot = \frac{\text{کو س م} \times (\text{ط} - \text{م})}{\text{کو س م} \times (\text{ط} + \text{م})} + \frac{\text{ثمان م} \times \text{ثمان ط}}{\text{ثمان م} \times \text{ثمان ع}} \quad \text{اور}$$

تو ثمان م = م ط × کو س ط اور ثمان ع = ۱/۲ ط × کو س ط (ثمان ط - کو س م)

(۱۶) اگر ثمان می = ن ط × سن ط × کو س ط ÷ (۱ - ن ط)

تو ثمان (ط - می) = (۱ - ن ط) × ط

(۱۷) اگر ت = ز + و = ۹۰ تو

لا ثمان ٹ × ثمان ز + ثمان ت × ثمان و + ثمان ز × ثمان و = ۱

(۲) کو س ت + کو س ز + کو س و = کو س ت × کو س ز × کو س و

(۳) ثمان ت + ثمان ز + ثمان و = ثمان ت × ثمان ز × ثمان و + سکت ت × سکت ز × سکت و

اسم کرت + ۹۶ = ۱۸۰ تو

(۱) m کثرت \times سن رخسن و = سن انت \div سن م رخسن م و

[illegible]

۱۵۔ مندرجہ ذیل ثبوت کرو۔

$$(1) \text{ 'مانا' } = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ 'مانج' } \quad (2) \text{ 'مانا' } = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ 'مان' } \quad \therefore 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$
$$1 \frac{1}{2} \text{ کوٹ } 3 \frac{1}{2} \text{ کوٹ } = \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2} \text{ (۳) } \frac{1}{2} \text{ کوٹ } + \frac{1}{2} \text{ کوٹ } = 1 \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

(۵) اگر $e = \cos^{-1} \frac{P+Q}{R}$ اور $c = \cos^{-1} \frac{P-Q}{R}$ تو $\frac{P+Q}{R} + \frac{P-Q}{R} = e + c$

(۶) اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ تو

سن رنج + ۵۰ = سن ۶۰ × کوس ۳۶

۱۰) اگر کوٹ می۔ بن کوٹ (پ۔ می)

تو ہی... یسین' $(\frac{n-1}{n+1})$ یسین ط)

(د) اگر در سن (۱+۱) - در سن (۱-۱) = ثامن ۱۴۱۲ هجری قمری = ۱۵۱۰ میلادی

(۹) اگر $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ = $\frac{1}{x+y}$ = $\frac{1}{x-y}$ (۱-۲) تو

$$-\frac{1}{2+1}V^+ = \frac{6}{1}$$

۱۱۱ اگر سن امی یسن ای مام = سن ای قوی = یا ± ۱/۴

(۱۲) معلوم ہو کہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} = \frac{1}{2}$

(۱۳) ثابت کرو کہ $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n+1}$ اور $\frac{1}{n+2}$ کے مجموعہ کا کوئی بھی مشترک ضرب n سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

(۱۴) دیکھو کہ ٹان (مٹان اٹ) = مٹان (ٹان اٹ + ٹان اٹ ۳)

(۱۰) اگر سن ای سن ا لم ی = $\frac{1}{m}$ پ تو می = $\frac{1}{m+m+o}$

(۱۶) مکملہ اسمیں کا > $\frac{1}{n}$ پ کہ ہر مان لکھنا لکھان لم (لم پ - ط) خٹمان

$$= \frac{\text{کوس } \theta + \text{تان } \theta \times \text{کوس } \phi}{1 + \text{تان } \theta \times \text{تان } \phi}$$

(۱۶) مجموعہ کنی زاویوں سن $\frac{m \times r}{p + q}$ سن $\frac{m \times r}{p + q}$ وغیرہ کا اس شکل یعنی

سچا $\frac{m \times n}{m + n}$ میں لکھا جاسکتا ہے اس میں۔

(۱۸) ثابت کریں کہ کوٹ-۱ $\left\{ \frac{1}{n} \times (n+1) \times n + \frac{1}{n} \right\}$

$$= \frac{1}{n} (1 + n) - \frac{1}{n} = 1$$

اور اس سے مندرجہ ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

$$\text{کوٹ } ۱ \left(b + \frac{f}{b} \right) + \text{کوٹ } ۲ \left(b^2 + \frac{f}{b} \right) + \text{کوٹ } ۳ \left(b^3 + \frac{f}{b} \right) + \text{کوٹ } ۴ \left(b^4 + \frac{f}{b} \right) + \text{کوٹ } ۵ \left(b^5 + \frac{f}{b} \right)$$

جواب حاصل جمع = کوٹ ۱ - $(b \times \frac{1+5}{1+2} + \frac{2}{2 \times 5})$

(۱۹) دیکھو کہ $\frac{1}{2} \times 3$ کو کیا (۱/۲ مانع ۳) $+\frac{1}{2} \times 3$ سے (۱/۲ مانع ۳) \times کے برابر ہے۔
 $(\frac{1}{2} + 3) \times 3 =$

۱۶) اگر $m = \text{ٹان}$ ، $s = \text{سن}$ اور $n = \text{ٹان} - s$ کا تون اور m میں جو نسبت ہے اسکو دریافت کرو۔

(۲) اگر ٹمان ۸ = $\frac{۲}{۵}$ توٹ \times کوکس ۸۲ + ٹ \times سن ۸۴ = ٹ

(۲) اگر (می-ٹ) \times کوکس پ + ڈ \times سن (ل-پ) = ۰

اور (ق-ٹ) \times کوس پ + \times کوس (ل-پ) = ۰

تو (می-ٹ) \times سن ل + (ق-ڑ) \times کو س ل + ڈ = .

(۴) اگر ٹ ۴ سین + ٹ ۴ کوس = ۸ = ۸ اور ٹ ۴ سین ۴ + ٹ ۴ کوس ۴ = ۸

اورٹ \times ٹان \neq ٹ \times ٹان کا توٹ \times ٹ = ٹ \times ٹر

(۴) اگر $\frac{1}{x} = 8$ مان $\frac{1}{x} = 8$ اور کوس $\frac{1}{x} = 8$

توم = $\frac{8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8}{8}$

(۶) اگر کوس و = $\frac{5 - \text{کوس آ}}{1 - \text{کوس آ} \times \frac{5}{\text{کوس آ}}}$ تو مان $\frac{1}{\text{کوس آ}} = \frac{5 + 1}{5 - 1} \times \text{مان} \frac{1}{\text{کوس آ}}$

(۶) اگر $\theta \times$ سک $\theta - \theta \times$ کوس $\theta = \theta \times$ ٹ اور $\theta \times$ کوس $\theta - \theta \times$ سک $\theta = \theta \times$ ٹ

نوٹ = رقم

(۶) اگر $t \times \text{ٹان ت} + r \times \text{ٹان ر} = (r + t) \times \text{ٹان لٹ}$ (ت + ر) تو $t \times \text{کوس} = r \times \text{کوس}$

(۹) اگر کوس ط = کوس ص × کوس ع = کوس م × کوس ح

اور سن ط = سن م × سن ع × سن ح تو ثان ط = ثان م × ثان ع × ثان ح

(۱۰) اگر سن ط = سن م × سن ع = سن م × سن ح (ط - م) تو ظاہر کرو کہ

کوٹ م - کوٹ ط = کوٹ ط × کوٹ ح + کوٹ م × کوٹ ع

(۱۱) اگر مساوات (ٹ + ٹ) × ثان م = (ع - ط) × ثان ح = (ٹ - ٹ) × ثان م (ع + ط) اور

ٹ × کوس م = ع + ٹ × کوس م = ط سے ۴ خارج کی جاوے تو وہ مساوات جو

اس سے نکلی یہ ہوگی ٹ + ط - م = ٹ × کوس م = ع = ط

(۱۲) اگر کوس م = ۴ = کوس ط / کوس م = ۴ = کوس ط / کوس م اور ثان ط = ۴ = ثان ط / ثان ط

تو ثان ط = ۴ = ثان ط × ثان ط

(۱۳) اگر (ٹ + ٹ) × سن م = ۴ = (ٹ - ٹ) × کوس م = م (ٹ + ٹ) اور ٹ × سن م = ۴

+ ٹ × کوس م = ۴ = م (ٹ + ٹ) تو ٹ = ۴ ± م یا (ٹ + ٹ) = ۴ + ۱ = ۵

(۱۴) اگر ٹ × سن ط + ٹ × سن م + ط × سن ف = ۰ اور ٹ × کوس ط

+ ٹ × کوس م + ط × کوس ف = ۰ تو

ٹ : ٹ : ط :: سن (م - ف) : سن (ن - ط) : سن (ط - م)

(۱۵) اگر مساواتوں مندرجہ ذیل

$$\text{یعنی ب} = \left(\frac{\text{سن ع}}{\text{ط ۲}} + \frac{\text{کوس ع}}{\text{ط ۲}} \right) \times \text{کوس می} + \frac{\text{سن می}}{\text{ط ۲}} \dots \dots (۱)$$

$$\text{ر} = \frac{\text{کوس ا ع}}{\text{ط ۲}} + \frac{\text{سن ا ع}}{\text{ط ۲}} \dots \dots (۲)$$

$$\text{و} = \left(\frac{۱}{\text{ط ۲}} - \frac{۱}{\text{ط ۱}} \right) \times \text{سن ع} \times \text{کوس ع} \times \text{کوس می} \dots \dots (۳)$$

اور یہی خارج کئے جاویں تو وہ مساوات جو اس سے نکلے گی وہ یہ ہوگی۔

$$\left(\frac{۱}{\text{ط ۲}} - \frac{۱}{\text{ط ۱}} \right) \times (ز - \frac{۱}{\text{ط ۲}}) \times (ز - \frac{۱}{\text{ط ۱}}) = (ز + \frac{۱}{\text{ط ۲}} - \frac{۱}{\text{ط ۱}} - \frac{۱}{\text{ط ۲}}) \times \text{ٹ}$$

$$(۱۶) \text{ می د کوس ۳ ط} + \text{لا} \times \text{سن ۳ ط} = \text{ٹ} \times (\text{کوس ۴ ط}) \dots \dots (۱۶)$$

$$\times \text{کوس ۳ ط} = \text{ٹ} \times (\text{کوس ۴ ط}) \times \frac{۱}{\text{ط ۲}} \dots \dots (۱۷)$$

تو مساوات یہ ہوگی (می + ن) = ۲ = ٹ (ٹی - لا)

$$(۱۸) \text{ مثلث قائمہ الزاویہ روت کات زاویہ قائمہ ہو تو کوس (۲ - ر) = } \frac{\text{ٹ}}{\text{ط ۲}} + (\text{ٹ ۳} - \text{ٹ ۲}) \dots \dots (۱۸)$$

$$(۲) \text{ سطح} = (\text{نصف جلتہ المحدود}) - (\text{نصف جلتہ المحدود - ضلع مقابل زاویہ قائمہ})$$

$$(۳) \text{ اگر جلتہ المحدود اور زاویہ ت سے ٹ پر کا عمود معلوم ہو تو تینوں ضلع دریافت کرو}$$

$$(۴) \text{ ایک شخص نے ایک برج کی اونچائی کے زاویہ کو ۶۰ دریاقت کیا اور اوس مقام سے}$$

$$۱۰۰ گز نیچر ہٹ کر اونچائی زاویہ ۳۰ دریاقت ہوئی تو بلندی برج کیا ہوگی۔$$

$$(۵) \text{ ایک مرد و برج پر ایک کا دوم مینا رہے بچ کے پائین سے اور ایک چھوٹی فاصلہ}$$

$$\text{سے قلعہ ہا بچ اور مینا ر قلعہ کا زاویہ ارتفاعی معلوم ہوا تو دریاقت کرو کہ برج اور}$$

مینار کی اونچائی کیا ہوگی اول جب فاصلہ کو سطح افقی پر ناپ لیوین اور دوم جبکہ اوکو ایک ایسے سطح پر ناپین جو سطح افقی سے ایک دیا ہوا زاویہ بناوے۔

(۶) ایک شخص نے ایک برج کے پامن سے دو سو ۸ کر کے فاصلہ سے دیکھا کہ او سکی اونچائی کا زاویہ ۳۰° مثال ہے تو برج کی اونچائی کا لوگارثم دریافت کرول ٹان

$$۳۰° = ۱۰.۶۱۴۴۹۸۱۸ \text{ لی } ۳۱۱ = ۲۶۳۵۹۳۹۲۵ -$$

(۷) مثلث قائمہ الزاویہ کے قائمہ کے سامنے والے ضلع ۳۸۵۳ اور ایک زاویہ ۳۷° ۳۸' ہے تو سامنے والے ضلع کا لوگارثم دریافت کرول کو سک ۳۸' ۳۷° =

$$۳۵۳۵۷۵۲۱۰۶۲۱ \text{ لی } ۳۳۶۵۴۳ = ۷۹۵۱۰۷۵۰$$

(۸) ایک مثلث متساوی الاضلاع ایسا بنایا جاوے کہ تینوں کون مثلث متساوی الساقین قائمہ الزاویہ کے تینوں حلقوں پر ہوں اور او سکا ایک ضلع وتر کے متوازی ہو تو اگر مثلث قائمہ الزاویہ کے ایک ضلع ح ہو تو مثلث متساوی الاضلاع کے سطح برابر ہے ۲ بج سن ۶۰ سن ۹۰

(۹) اب ح ایک مثلث قائمہ الزاویہ ہے کہ جس کا قائمہ کے سامنے والا ضلع اب ہے اگر کش ایک دائرہ کا نصف قطر ہو جو اور اب اور اج کے بڑھائے ہوئے حصوں کو اور ب ج کو چھوٹا ہو اور شہ دوسرا دائرہ ہو جو ب ا اور ب ج کے

برہانے ہوئی حصون کو اور اج کچھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ سطح شلت = شس × شس
(۱۰) دو دائرہ جنکی نصف قطرب اور ج بین باہر سے آپس میں چھوتے ہیں اور اگر دو خط

جو دونوں کا تماس ہے زاویہ ط بناوے تو سن ط = $\frac{۲(دب-ج)}{۲(دب+ج)}$

(۱۱) دب ر ایک شلت قائمہ الزاویہ ہے جس کا زاویہ قائمہ ہے اور دب سامنہ والا

ضلع ہے اگر ان اور ب س دب پر عمود ہو اور رط شلت کرب ر بیرونی دائرہ کا

ماس ہو جو دب کو بڑھائی ہوے حصہ سے ط پر ملتا ہو اور اگر در اور ب ر ضلعی ب س

اور دن کو س اور ن میں قطع کرتا ہو تو ثابت کرو کہ سن ط ایک خط میں واقع ہو

اور دریافت کرو کہ دب کے نصف کے نقطہ سے اس خط پر عمود کھینچیں تو اسکی

لبائی کیا ہوگی جواب لبائی عمود کی = $\frac{۱}{۲} \frac{(ر+دب)}{(ر-دب)}$

(۱۲) شلت دت رکات زاویہ قائمہ ہے تو ثابت کرو کہ ڈ کوٹ لم = د = ٹ ہڈ

(۱۳) ایک بیج کے خاص دکن ایک مقام س سے اسکی اونچائی کا زاویہ ۳۳

اور س کے خاص پچم ایک مقام ج سے جو س سے ب فاصلہ پر ہے اونچائی کا زاویہ

۸۰ ہے تو ثابت کرو کہ اونچائی بیج کے = $\frac{ب}{(۲۲+۲۲)}$

۱۔ ٹان ر = ت - $\frac{رسن}{رکوس}$

۱۔ کو س لم (ت-ر) = $\frac{ٹ+رسن}{۲}$

$$\text{س (ت - د)} = \frac{\text{ط - ز}}{\text{ز}}$$

(۳) $\frac{1}{p} (p^2 + q^2 + r^2) = p^2 + q^2 + r^2$ -

(۴) $\frac{1}{m}(\dot{r} + r\dot{\theta}) = \frac{1}{m}(\dot{r} + r\dot{\theta})$ کو $s + \frac{1}{2}r\dot{\theta}^2$ کو s

$$+ \frac{1}{m} (r + \delta) \text{ کوست}$$

(۵) ڈوا = (ٹ + ژ) سن ۲ لم د + (ٹ - ژ) اکوس ۲ لم د

(۶) ۱ ٹ کوٹ ۱ ٹ = (۱ ٹ + ۱ ٹ) (۱ ٹ + ۱ ٹ) ۱ ٹ

$$(6) \quad \frac{\frac{1}{r} \sin \frac{\theta}{r}}{\frac{1}{r} \sin \frac{\theta}{r}} = \frac{\frac{1}{r} \sin \frac{\theta}{r}}{\frac{1}{r} \sin \frac{\theta}{r}}$$

(۸) اگر ٹر اور معلوم ہو جسمین ٹ برا ہوڑ سے اور اگر ڈوشلت کا تیسرا ضلع ہو تو

دو۔ ۲ ڈ ڈ کو س ۲ + ۲ = ۴ ٹ ٹ کو س ۲

(۹) اگر زاویہ د کو ڈضلع کی نصف کرنے والا نقطہ سے ملا دیوین تو اس خط کی لمبائی $\frac{1}{2}d$

$$\frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{x} - (1+x) \right\} \frac{1}{x}$$

(۱۰) سطح = $\frac{1}{2} (P_1 + P_2)$ (سنت سن ر)

(۱۱) لکھی ٹیٹ = (کو س ۱ ٹ - کو س ۲ ر) + $\frac{1}{2}$ (کو س ۱ ٹ - کو س ۲ ر) + $\frac{1}{2}$ (کو س ۱ ٹ - کو س ۲ ر) + غیر

$$(۱۳) \quad \frac{1}{x} = \frac{x^0}{x^1} = \frac{x^0}{x^1} + \frac{x^1}{x^2} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^4} + \dots$$

$$\dots + \frac{\frac{r}{2} \text{ سن } 2}{\frac{r}{2} \text{ سن } 2} + \frac{\frac{r}{2} \text{ سن } 2}{\frac{r}{2} \text{ سن } 2} + \frac{\frac{r}{2} \text{ سن } 2}{\frac{r}{2} \text{ سن } 2} = z \quad (13)$$

(۱۴) اگر $\frac{r}{\sin R} = \frac{R}{\sin r}$ توت = کوس (ا ب کوس لم د) - $\frac{1}{4}$ و اور کوٹ $\frac{1}{4}$

$$(ر-ت) = \frac{r + \text{م کوس ر}}{\text{م سن ر}}$$

(۱۵) اگر زاویوں کا سن سلسلہ جمع میں ہو تو اون زاویوں کی نصف کو کوسٹ بھی سلسلہ جمع میں ہوگا۔

(۱۶) اگر کوسٹ اور کوس ر اور کوس د سلسلہ جمع میں ہو تو (ج-ٹ) اور (ج-ٹ) اور (ج-ڈ) سلسلہ میں ہوگا۔

(۱۷) اگر کوسٹ = $\frac{r}{\sin R}$ تو ثابت کرو کہ کوس لم (ت-ر) = $\frac{r + \text{ٹ م سن ر}}{\text{م سن ر}}$

$$\text{کوس لم (ت+ر)} = \frac{r + \text{ٹ م سن ر}}{\text{م سن ر}}$$

(۱۸) اگر ایک مثلث میں ٹ-ڈ سے بہت چھوٹا ہو تو ت-ر کا جواب سکندھ میں = ہوگا

$$\text{قریب م} = \frac{r}{\sin R} + \left(\frac{r}{\sin R} \right) \frac{\text{سن ا}}{\text{سن ا}}$$

(۱۹) اگر کسی مثلث کے ضلع ت اور زاویہ ت میں تبدیل نہ تو ثابت کرو کہ باقی ضلعوں کی

کمی و بیشی مساوات پ ر سک + پ ڈ سک د = ظاہر ہو سکتی ہے۔

(۲۰) کسی مثلث کے ضلع ۱۳-۱۲-۱۱ ہیں تو اس کی سطح کیا ہوگی۔

(۲۱) اگر کسی مثلث کے حملہ احمہ و سطح اور ایک زاویہ معلوم ہو تو زاویہ معلومہ کے سامنے

ضلع کے مقدار کیا ہوگی۔

(۳) اگر ایک ثلث میں تاورد اور سطح معلوم ہو تو باقی ضلع اور زاویہ کیا ہوگی۔
 (۴) اگر ایک ثلث کے چوٹی کا زاویہ اور قاعدہ پر کا عمود اور قاعدہ کے دونوں کھڑے سے جو سطح سکی وہ معلوم ہو تو ثلث کا ضلع اور زاویہ دریافت کرو
 (۵) اگر ایک پہاڑ کے پائین سے چوٹے تک درازی $\frac{۲}{۳}$ میل ہے جسکی ارتفاع فی ہ میں ایک فٹ ہے تو ایک ہڑ ہے راہ کی لمبائی جسکی فی ۱۲ میں ایک فٹ اونچائی ہو کیا ہوگی۔
 (۶) ایک ثلث کی سطح اس ثلث کی سطح کی $\frac{۳}{۴}$ حصہ ہو جسکی ضلع برابر ہیں ۲ خطوں کی جو پہلے ثلث کے زاویوں کو اوکے سامنے والا ضلعوں کی بیچ نقطہ کے جو خطوط ملانے سے بنتے ہیں۔

(۷) اگر ایک شے مکعب کے ۳ کنارہ پر جو ایک نقطہ جیم میں متقی ہیں ۳ نقطہ د۔ ر۔ ت پہنچائیں جس کا فاصلہ جیم سے ڈڑٹ ہے تو ثابت کرو کہ درت ملانے سے وہ ثلث بنو گا جسکے سطح - $\frac{۱}{۲}$ (ڈوہڑت + ڈوٹاٹ)

(۸) اگر کسی ثلث کے ضلع ن۔ ا۔ ون + ۱ ہوں جبین ن کی مقدار بہت بڑی ہے تو زاویوں کو دریافت کرو اور فی زاویہ کا فرق ۶۰ سے کیا ہوگا۔

(۹) اگر ۳ فٹ اونچ کوئی شے کسی برج پر کھڑے ہو اور اس شے کا زاویہ برج کی پائین سے سطح افقی پر سونگڑ کے فاصلہ پر ۱۵۰ ہو تو اونچائی برج کی کیا ہوگی

جواب $\pm \frac{1}{3} \dots 3$ — اگر اسمین ان دونوں علامتوں سے کیا مراد ہے۔

(۱۰) مشے بوج ایک جہاز پر سے ایک خط میں نظر میں جس خط کا حکا و جہاز کی راہ کے ساتھ جو خاص اوتر کی طرف ہے وہاں کا ہے جہاز جو اسی راہ کو تبدیل کر کے اوتر پہنچنے کی جانب دینل چلا تو وہی دونوں سے خاص پورب اور اوتر پورب کی جانب نظر میں توب فن کے درمیان کا فاصلہ دریافت کرو جواب $(3-7)$ میل

(۱۱) ایک جہاز نے دوسرے جہاز کو جو اسکے متوازی حل رہا ہے اوتر جانب کے ساتھ زاویہ ب بتاتے دیکھا بعد ن گنٹہ چلنے کے اوس جہاز کو اوتر سے زاویہ ج پر اور م گنٹہ کے بعد زاویہ س پر دیکھا تو دریافت کرو کہ وہی جہاز کس طرف کو جاتے تھے جواب اگر جہازوں کی راہ اوتر جانب سے زاویہ ط پر ہو تو جواب مساوات $\frac{\sin (س)}{\sin (ط)} = \frac{ن}{م}$ \times $\frac{\sin (ج-ب)}{\sin (ج-س)}$ سے دریافت ہو سکتا ہے۔

(۱۲) دو دیوار ب اور ب فٹ اونچا اسطرح پر واقع ہیں کہ اون سے زاویہ قائمہ بنتا ہے اور اگر اون کا سامہ ساتھ ج ح فٹ جو راہ ہو جبکہ افتاب خاص دکن طرف میں پس اگر سطح افقی سے ارتفاع افتاب ہو اور پہلے دیوار کا جھکاؤ اوتر دکن خط سے

$$ع ہو تو ثابت کرو کوٹ $\alpha = \left(\frac{ج}{ب} + \frac{ط}{س} \right)$$$

(۱۳) ایک لڑکا دو پہر کے وقت پتنگ اور اٹا تھا جبکہ مواد دکن سے زاویہ ب پر چلتی تھی

اور اوتر سے تنگ کا سایہ کا زاویہ ج تھا ایک ہو بدل گئی یعنی کن سے زاویہ پ بگئی
اور سایہ اوتر سے ج پر ہو گیا اور بند ہی تنگ کی لم پ سے اتنی زیادہ ہوئی کہ قنبی
پہلے اوس سے پستی ہے اگر آفتاب کی ارتفاع کا زاویہ ط ہو اور اول میں تنگ کا ارتفاع

$$\text{زاویہ لہ پ} = \text{ع ہو ثوابت کر دو کہ ثان ط} = \frac{\text{سن ج سن ج}}{\text{سن (ب-ج) (س-ج)}}$$

$$\text{اور ثان (لہ پ-ع)} = \frac{\text{سن (ب-ج) سن ج}}{\text{سن (ب-ج) سن ج}}$$

(۱۲) — فزاقون نے ایک سوداگر کے جہاز کو بندر گاہ سے چوڑے ہوتے دیکھا کہ
جسکا فاصلہ معلوم ہے اور جانب روانی جہاز کے دریافت کی اور دونوں جہازوں کی
چلنے کا حساب معلوم ہو تو دریافت کر دو کہ قس نزاق کس جانب کو اپنا جہاز چلا دیں گے
تاکہ دوسرے کو ٹکرائے نہ ہو مستعد ہوں جبکہ وہ جہاز ایک گولہ رد کے فاصلہ میں ہو۔

(۱۵) دو شہر ایک دوسرے کی اوتر دکن جانب کو واقع ہیں کہ جنکا درمیانی فاصلہ لہ میل
ہے ایک بلون سے اونکا زاویہ پستی ۴۵ اور ۶۰ کا نظر آیا جب بلون خط انقی میں
دکن پستی ۳۰ جانب چھ میل پر گیا تو ارن شہر دن کا زاویہ پستی بہ نسبت پہلے کے
نصف ہو کر ثوابت کر دو کہ بندی بلون کو قریب ۳ میل کے تھی۔

(۱۶) اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ ۶۰ کا ہو اور جن دو ضلعوں سے وہ بنتے اون میں
بامقدور وہ نسبت ہو جو ۱۹ کو اسے ہے ثوابت کر دو کہ باقی دونوں کتنا ہو ۱۱ ۱۹ گیارہ

تفصیلات

اگر دو زاویوں کا فرق ۱۰ ہو اور ان کا مجموعہ ۵۴ ہو تو ہر ایک زاویہ کتنا ہوگا۔

جواب ۱۸ اور ۴۶

سوال ۲۔ $\frac{4}{5}$ زاویہ قائمہ کو ایسی دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ کے ڈگری سے دوسرے حصہ کے ڈگری سے وہ نسبت ہو جو کہ ۳ اور ۱۰ میں ہے۔ جواب ۱۸ اور ۴۶

سوال ۳۔ نصف زاویہ قائمہ کو ایسی دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ کے ڈگری سے دوسرے حصہ کے ڈگری سے وہ نسبت ہو جو کہ ۹ اور ۵ میں ہے۔ جواب ۳۰ اور ۱۸

سوال ۴۔ ۱۵ کا مقدار ڈگری کے کسوا عشریہ میں نکالو۔ جواب ۵۴۰۰۹

سوال ۵۔ ۸ کے زاویہ کو ایسی دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک میں اوس قدر انگریزی منٹ ہوں جس قدر کہ دوسرے میں فرانسیسی ہوں۔ جواب $\frac{7}{11}$ اور $\frac{24}{11}$

سوال ۶۔ اگر ایک مثلث $\frac{1}{2}$ زاویہ قائمہ کو راویہ کے ایک ہی مقرر کرین تو بتلاؤ کہ وہ ڈگری میں کتنی عدد نکھیں گے۔

جواب $\frac{1}{2}$

سوال ۷۔ بتلاؤ کہ زاویہ کی ایک ہی میں کتنے عدد ڈگری کے ہونگے اگرچہ $\frac{1}{2}$ کا

جواب ۴

ناویہ ۲ ہو۔

سوال ۸۔ دو کثیر الاضلاع متساوی الخطوط کہ جنکی ضلعون میں وہ نسبت ہو جو کہ ۲ کو ۳ کے ساتھ ہے اور ایک کے فی زاویہ میں اتنی ہی کر دین جتنی دوسرے میں دیکری میں تو بتلاؤ کہ دسے زاویہ کتنے ہیں۔ جواب ایک کثیر الاضلاع متساوی الخط میں ۸ ضلع اور دوسری میں ۱۲ ہیں پس پہلے میں فی زاویہ برابر کا $\frac{3}{2}$ قایمہ کے اور دوسرے کا زاویہ $\frac{2}{3}$ قایمہ

سوال ۹۔ اگرچہ ایک زاویہ میں اتنی انگریزی سکندھوں جتنی کہ دوسرے زاویہ میں فریج منٹ ہیں تو اون دونوں زاویوں میں کیا نسبت ہوگی۔ جواب جو نسبت کہ ۵ کو ۶۲ سے ہے

تمیلات

اگر کسی زاویہ کا سن $\frac{3}{2}$ ہو تو اسکا کوس ٹان وغیرہ نکالو۔
سوال ۲۔ اگر کسی زاویہ کا ٹان $\frac{2}{3}$ ہو تو اسکا کوس ٹان سک وغیرہ کیا ہوگا۔
سوال ۳۔ اگر کسی زاویہ کا کوس $\frac{2}{3}$ ہو تو اسکا کوس ٹان سک وغیرہ کیا ہوگا۔
سوال ۴۔ ثابت کرو کہ سن Δ ٹان Δ + کوس Δ کوٹ Δ + سن Δ کوس Δ = ٹان Δ + کوٹ Δ

سوال ۵۔ ثابت کرو کہ ۲ (سن Δ + کوس Δ) - ۳ (سن Δ + کوس Δ) + ۱ = ۰

مساوات ذیل کو حل کرو

سوال ۶۔ سن $\frac{3}{4}$ = کوس $\frac{1}{2}$ جواب $\frac{1}{4}$

سوال ۷۔ سن $\frac{1}{2}$ + کوس $\frac{1}{4}$ = ۱ جواب $\frac{1}{4}$ یا ۰

سوال ۸۔ کوٹ $\frac{1}{2}$ = کوس $\frac{1}{4}$ جواب $\frac{1}{4}$ یا $\frac{3}{4}$

سوال ۹۔ سن $\frac{1}{2}$ - کوس $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ = ۰ جواب $\frac{1}{4}$

سوال ۱۰۔ ۳ سک $\frac{1}{4}$ + ۸ = ۱۰ سک $\frac{1}{4}$ جواب $\frac{1}{4}$ یا $\frac{3}{4}$

سوال ۱۱۔ فرض کرو کہ سن (آ-ب) = $\frac{1}{4}$ اور کوس (آ+ب) = $\frac{1}{4}$ تو

آ اور ب نکالو۔ جواب آ = $\frac{1}{4}$ اور ب = $\frac{3}{4}$

۱۔ ۸۵۰ فر $\frac{1}{4}$ ۹۳۰ $\frac{1}{4}$ ۶۲۰ ان سب زاویوں کی سن کوٹ غیرہ کا حاصل تبتلاؤ

۲۔ صفر اور ۹۰۰ کے درمیان وہ کونسی زاویہ ہیں کہ جس سے مساوات ذیل ثابت ہو

ثان $\frac{1}{4}$ = ۱

کوس $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$

۳۔ در سن $\frac{1}{4}$ کا حاصل کیا ہوگا جبکہ ن ایک عدد صحیح ہے

۴۔ سن $\left\{ \frac{1}{4} + (-1) \frac{1}{4} \right\}$ کا حاصل کیا ہوگا جبکہ یون

کوئی عدد صحیح ہو۔

- ۵۔ سن ۸ + کوس ۸ = ۰ اس مساوات کو حل کرو
- ۶۔ ۲ سن ۸ - ۸ کوس ۸ = ۰ بشرح صدر
- ۷۔ تبدیلیات علامت اور حاصل کوس ۸ - سن ۸ کا کیا ہوگا جبکہ زاویہ ۸ صفر سے دوپ تک بڑھتا جاوے۔

- ۸۔ اور اسی طرح اسکا یہی کوس ۸ - سن ۸ اور ثان ۸ کوٹ ۸ کا بشرح ملگا
- ۹۔ سک ۸ = $\frac{2\pi}{3}$ یہ مساوات ممکن ہے یا نہیں۔
- ان مساواتوں میں لکھنے کو برابر ہے تمام جواب تبتلاؤ

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| ۱۔ ثان ۸ = ۱ | جواب ن پ + $\frac{\pi}{3}$ |
| ۲۔ سک ۸ = ۱ | جواب (۲ن + $\frac{\pi}{3}$) پ |
| ۳۔ کوس ۸ = ۱ | جواب ۲ن پ |
| ۴۔ کوس ۸ = - $\frac{1}{2}$ | جواب ۲ن پ $\pm \frac{2\pi}{3}$ |
| ۵۔ سن ۸ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | جواب ن پ $\pm \frac{\pi}{3}$ |
| ۶۔ کوسک ۸ = $\frac{\pi}{4}$ | جواب ن پ $\pm \frac{\pi}{4}$ |
| ۷۔ کوس ۸ = کوسٹ | جواب ن پ $\pm \pi$ |
| ۸۔ سک ۸ = ۲ | جواب ن پ $\pm \frac{\pi}{2}$ |

- ۹ $\text{ٹان } ۴ = \text{ٹان } ۶$ جواب $n \pm ۶$
- ۱۰ $\text{ٹان } ۴ = \frac{۱}{۶}$ جواب $n \pm \frac{۱}{۶}$
- ۱۱ $\text{سک } ۴ = -\frac{۱}{۶} \text{ اور کوس } ۴ = -\frac{۱}{۶}$ جواب $۲n \pm \frac{۱}{۶}$
- ۱۲ ثابِت کرو کہ جتنے زاویہ کہ جنکا سن اور کوس سن وہی ہو جو ط کا ہو
- ۱۳ وہ $۲n \pm ۶$ میں شامل ہیں ان مساواتوں کو حل کرو
- ۱ $\text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱ = \text{ٹان } ۲ + \text{سک } ۲$
- ۲ $\text{سن } ۲ + \text{کوس } ۲ = \text{کوس } ۱ + \text{سن } ۱$
- ۳ $\text{ٹان } (۲ + ۴) - \text{ٹان } (۲ - ۴) = ۲ \text{ ٹان } ۲$
- ۴ $\text{سن } ۳ - \text{کوس } ۳ = \text{کوس } ۲ - \text{سن } ۲$
- ۵ $\text{سن } ۳ - \text{سن } ۳ = \text{سن } ۲ - \text{کوس } ۲$
- ۶ $\frac{\text{سن } ۳ + \text{سن } ۳ + \text{سن } ۵}{\text{سن } ۵} = \frac{\text{سن } ۳ + \text{سن } ۳ + \text{سن } ۵}{\text{سن } ۵}$
- ۷ $\frac{\text{سن } ۲}{\text{سن } ۲} = \frac{\text{سن } (۲ + ۴) - \text{کوس } (۲ + ۴)}{\text{سن } ۲}$
- ۸ $\text{سن } ۳ = \text{سن } ۲ - \text{کوس } ۲ - \text{کوس } ۳$
- ۹ $\text{کوس } ۳ - \text{کوس } ۳ = \text{ٹان } ۲$

- ۱۰ $\frac{\text{کوس } ۲\text{آ} - \text{کوس } ۳\text{آ}}{\text{سن } ۳\text{آ} - \text{سن } ۲\text{آ}} = \text{ثان } ۳\text{آ}$
- ۱۱ $\text{کوسک } ۲\text{آ} + \text{کوٹ } ۳\text{آ} = \text{کوٹ } ۲\text{آ} - \text{کوسک } ۳\text{آ}$
- ۱۲ $\text{کوس } (۲ - \text{پ}) + \text{کوسل } ۲ - \text{م کوس } (۲ - \text{ب}) = \text{کوس } ۲\text{آ کوس } ۲\text{ب} = \text{سن } ۲\text{آ}$
- ۱۳ $\text{سن } (۲ - \text{ب}) + \text{سن } ۲\text{ب} + \text{م سن } (۲ - \text{ب}) = \text{سن } ۲\text{ب کوس } ۲\text{آ} = \text{سن } ۲\text{آ}$
- ۱۴ $\frac{۱ - \text{ثان } (۲ - \text{م})}{۱ + \text{ثان } (۲ - \text{م})} = \text{سن } ۲\text{آ}$
- ۱۵ $\frac{\text{م ثان } ۲\text{آ} (۱ - \text{ثان } ۲\text{آ})}{۲(۱ + \text{ثان } ۲\text{آ})} = \text{سن } ۲\text{آ}$
- ۱۶ $\text{سن } ۲\text{آ} (۱ + \text{ثان } ۲\text{آ}) + \text{کوس } ۲\text{آ} (۱ + \text{کوٹ } ۲\text{آ}) = \text{سک } ۲\text{آ} + \text{کوسک } ۲\text{آ}$
- ۱۷ $\frac{\text{سن } ۳\text{آ} + \text{کوس } ۳\text{آ}}{\text{سن } ۳\text{آ} - \text{کوس } ۳\text{آ}} = \frac{۱ + \text{م سن } ۲\text{آ}}{۱ - \text{م سن } ۲\text{آ}} \times \text{ثان } (۲ - \text{م})$
- ۱۸ $\text{کوس } ۲\text{آ} + \text{کوس } (۲ - ۱) = \text{کوس } (۲ + ۱) = ۰$
- ۱۹ $\text{م سن } ۲\text{آ} (۲ - ۱) = \text{سن } (۲ + ۱) = \text{سن } ۳\text{آ}$
- ۲۰ $\text{م کوس } ۲\text{آ کوس } (۲ - ۱) = \text{کوس } (۲ + ۱) = \text{کوس } ۳\text{آ}$
- ۲۱ $\text{سن } ۳\text{آ} \text{سن } ۲\text{آ} + \text{کوس } ۳\text{آ کوس } ۲\text{آ} = \text{کوس } ۳\text{آ}$
- ۲۲ $\frac{\text{کوس } ۳\text{آ} \text{سن } ۲\text{آ}}{\text{سن } ۲\text{آ}} = \frac{\text{کوس } ۳\text{آ}}{\text{سن } ۲\text{آ}}$
- ۲۳ $\text{کوس } ۲\text{ن آ کوس } (۲ + \text{ن}) - \text{کوس } (۱ + \text{ن}) = ۰$

۲۰ سن آگو سٹک آسٹک آ- کوسن آسٹک آگو سٹک آ

= ۴۳۵ (۱۰۰۰ - ۵۶۵) = ۴۳۵

۲۶ کوس ۱۰ آ + کوس ۸ آ + ۳ کوس ۴ آ + ۳ کوس ۲ آ = ۸ کوس ۲ آ کوس ۳ آ

۲۷ کوٹ آ + کوٹ م + کوٹ س آ = کوٹک س آ (۲ م کوٹ س آ + ۳ کوٹ س س آ)

$$\begin{array}{r} \text{کوسک آ} = \text{س م} + \text{م کوس م آ} \\ \hline \text{کوس آ} - \text{سن آ} - \text{کوس م آ} + \text{سن م آ} \end{array}$$

۲۹ کوس ۲ آ = (کوس آ - سن ۳ آ) + ۲ کوس سن ۳ آ کوس آ

۳. کوس ۶ آ - سن ۶ آ = کوس ۲ آ (۱-۱/۲ سن ۲ آ)

مساوات ذیل کو حل کرو

۳۱. تان $(8 - \frac{5}{2})$ + کوٹ $(8 - \frac{5}{2})$ = ۴

۳۲ سن ۸۲ + سن ۸ = ۰

۳۳ سن ۸۶-سن ۸۷=سن ۸۳

۳۳ سن ۸ + کو س ۸ = $\frac{1}{m}$

۳۵ سن ۸۵ = ۱۴ سن ۸

$$۳۶ \quad \text{کوس } ۳ + \text{کوس } ۲ + \text{کوس } ۱ = ۰$$

$$۳۷ \quad \text{سن } ۳ + \text{سن } ۲ + \text{سن } ۱ = ۰$$

$$۳۸ \quad \text{ٹان } ۳ + \text{ٹان } ۲ = \left(۳ + \frac{۳}{۲} \right) = ۲$$

$$۳۹ \quad \text{ٹان } ۲ = \text{کوس } ۲ - \text{کوٹ } ۲$$

$$۴۰ \quad \text{ٹان } ۳ = \left(۳ + \frac{۳}{۲} \right) - \left(۳ - \frac{۳}{۲} \right)$$

۱۔ جبکہ آ۔ ۳ اور ۳ کے درمیان جو توت ثابت کرو کہ سن ۳ = ۱۲ + سن ۱ - ۱۲

۲ اگر ۳ زاویہ ۳ اور ۳ کے درمیان ہو تو کوس ۳ کو بنام سن ۱ کی نکالو

۳ جب ۳ = ۳ اور ۳ کے درمیان ہو تو سن ۳ کو بنام سن ۱ کے نکالو

۴ اگر ۳ سن ۱ = ۱۲ + سن ۲ + ۱۲ - ۱۲ اور دو کوس آ = ۱۲ + سن ۲ - ۱۲

۵ - ۱۲ - سن ۲ تو بتلاؤ کہ آ کتنے ڈگریوں کے درمیان ہوگا

۶ بتلاؤ کہ آ کتنے ڈگریوں کے درمیان ہونے سے ۲ سن آ = ہو

$$۱۲ + سن ۲ - ۱۲ - سن ۲ کے ہو$$

۷ بتلاؤ کہ آ کتنے ڈگریوں کے درمیان ہو کہ دو کوس آ = ہو -

$$۱۲ + سن ۲ + ۱۲ - سن ۲ کے ہو$$

۸ ایک دی ہوئی زاویہ کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ جنکی سن میں ایک

دی ہوئی نسبت ہو۔

۸ ایک دی ہوئی زاویہ کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ جنکے کو س میں ایک

دی ہوئی نسبت ہو۔

۹ ایک دی ہوئی زاویہ کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ جنکے ٹان میں ایک دی ہوئی

۱۰ فرض کرو کہ ٹان $\frac{1}{2} = 2 - 3$ تو سن آنکلو

۱۱ فرض کرو کہ سن $10 = 1 - \frac{1}{2}$ تو کو س 10 آنکلو

۱۲ فرض کرو ٹان $12 = 1 - \frac{1}{2}$ تو سن 12 اور کو س 12 آنکلو

۱۳ ٹان 16 کو ٹان 20 کے قیمت معلومہ سے نکالو

۱۴ ثابت کرو ٹان $\frac{1}{2} = \frac{12 - 10}{12 + 10}$

۱۵ درس $10 - 12 = 2$ درس $10 + 12 = 22$ درس $\frac{1}{2} (10 - 12)$

۱۶ (کو س 10 + کو س 12) $2 = (12 - 10) + 2 = 2$ کو س $\frac{1}{2} (12 - 10)$ (ب)

۱۷ (کو س 10 - کو س 12) $2 = (12 - 10) - 2 = -2$ کو س $\frac{1}{2} (12 - 10)$ (ب)

۱۸ ثابت کرو کہ سن $12 = \frac{1}{2} = \frac{12 - 10}{12 + 10}$ کو س $12 = \frac{1}{2} = \frac{12 - 10}{12 + 10}$

اور ٹان $12 = \frac{1}{2} = 1 - 12$

۱۹ (ٹان 10 + کوٹ 12) $12 = 12 - 10 = 2$ ٹان $\frac{1}{2} (10 + 12)$

$$\begin{aligned}
 ۲۰ \quad \text{ٹان } ۲ &= \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴} \right) = \frac{\text{سک آ} + \text{ٹان آ}}{\text{سک آ} - \text{ٹان آ}} \\
 ۲۱ \quad \text{س } ۲ &= \left(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} \right) + \text{کوس } \left(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} \right) = \frac{\text{سن کا}}{\text{س کا}} \\
 ۲۲ \quad \text{س } ۲ &= (۱ + \text{سن } ۴) = ۱ + \text{سن } ۲ = \left(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} \right) \\
 ۲۳ \quad \text{کوس } ۴ &= \frac{۳}{۴} + \text{کوس } ۲ = \frac{۳}{۴} + \text{کوس } ۱ = \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}
 \end{aligned}$$

$$۲۴ \quad \text{ٹان } ۴ = \frac{۱ - ۲}{۳ + ۴} = \frac{۱ - ۲}{۳ + ۴}$$

$$۲۵ \quad \text{ٹان } ۱۲ = \frac{۱}{۲} = ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - ۹ + ۱۰ - ۱۱ + ۱۲$$

$$۲۶ \quad \text{اگر ٹان } ۱۲ = (۳ + ۲) \text{ ٹان } \frac{۱}{۲} \text{ تو لاکھ قیمت نکالو}$$

$$۲۷ \quad \text{اگر } ۲ = (ن + \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱}{۴}) \text{ پ تو ٹان } ۲ + \text{کوٹ } ۲ \text{ نکالو}$$

$$۲۸ \quad \text{اگر } ۲ = \frac{۳}{۴} \text{ تو } \frac{\text{کوس } ۳ \text{ کوس } ۱۳}{\text{کوس } ۳ + \text{کوس } ۵} \text{ کے قیمت نکالو}$$

$$۲۹ \quad \text{اگر سک } (ع + ط) + \text{سک } (ع - ط) = ۲ \text{ سک } ع \text{ کے ثوابت کرو}$$

$$\text{کہ کوس } ع = ۲ - \text{کوس } ط$$

$$۳۰ \quad \text{اگر ٹان } \frac{۱}{۲} = \left(\frac{۱ + س}{۱ - س} \right) \text{ ٹان } \frac{۱}{۲} \text{ ثوابت کرو کوس } ۱ = \frac{۱ + س}{۱ - س} \text{ کوس } ع$$

تمثیلات ذیل کے قاعدوں کو ثابت کرو

$$۱ \quad \text{کوس } (۱ + ب + ج) = ۱ - \text{ٹان } ۱ - \text{ٹان } ۲ - \text{ٹان } ۳ - \text{ٹان } ۴ - \text{ٹان } ۵ - \text{ٹان } ۶ - \text{ٹان } ۷ - \text{ٹان } ۸ - \text{ٹان } ۹ - \text{ٹان } ۱۰ - \text{ٹان } ۱۱ - \text{ٹان } ۱۲$$

$$۲ \quad \text{کوس } (۱ + ب + ج) = \text{ٹان } آ + \text{ٹان } ج - \text{ٹان } اٹان ب + \text{ٹان } ج + \text{ٹان } ب$$

۳ سن (آ-ب + س (ب-می) + س (می-آ) + س

$$= \frac{آ-ب}{۲} \text{ سن } \frac{ب-ج}{۲} \text{ سن } \frac{ج-آ}{۲}$$

$$m \quad m \quad \text{سن } (p-8) \quad \text{سن } (m-8-p) \quad \text{کوس } (8-m-p) = 1 + \text{کوس}$$

(۸۲-۸۴م) - کوس (۸۲-۸۴ ط) - کوس (۸۴م-۸۶ ط)

سن (ا+پ) کو س ب- سن (ا+ج) کو س ج = سن (ب-ج)

۴. کوس (ا+ب+ج) + کوس (ا+ب-ج) + کوس (ا+ج-ب)

$$+ \text{کوس (ب + ح - ا)} = \text{م کوس آ کوس ب کوس ج}$$

$$\text{کوئس آ} + \text{کوئس ب} + \text{کوئس ج} = \text{کوئس (ا + ب)}$$

$$x \text{ کوس (ب+ج) کو کس (ج+۱) - کو کس ۲ (۱+ب+ج) (ج)}$$

$$= \frac{\text{سن ج}}{\text{سن (ج-آ) سن (ج-ب)}} + \frac{\text{سن ب}}{\text{سن (بج) سن (ب-آ)}} + \frac{\text{سن آ}}{\text{سن (آ-ب) سن (آج)}}$$

۹ کو س (۱+ب) سن ب - کو س (۱+ج) سن ج =

سن (۱+ب) کو س ب سن (۱+ج) کو س ج

۱۰ سن + ب - مع (کو س ب - س (ا + ج - ۲ ب) کو س ج =

سن (ب-ج) { کوس (ب+ج-۱) + کوس (ا+ج-۲) + کوس (ا+ب-ج) }

۱۱ سن (ا + ب + ج) سن ب = سن (ا + ب) سن (ب + ج) کس آسن ج

۱۲ سن آسن ب سن (ب - ا) + سن ب سن ج سن (ج - ب) (

+ سن ج سن آسن (آ - ج) + سن (ب - ا) سن (ج - ب) سن (ج - ا) = ۰

۱۳ کوس (ا + ب) سن (ز - ب) + کوس (ب + ج) کس (ب - ج) (

+ کوس (ج + ک) سن (ج - ک) + کوس (ک + آ) کس (ک - آ) = ۰

۱۴ سن (ک - ب) سن (آ - ج) + سن (ب - ج) سن (آ - ک) (

+ سن (ج - ک) سن (ا - ب) = ۰

اگر آ + ب + ج = ۱۸۰ تو ثابت کرو کہ مساوات ۱۵ سے ۱۴ تک صحیح ہیں

۱۵ کوٹ $\frac{آ}{ب}$ + کوٹ $\frac{ب}{ج}$ + کوٹ $\frac{ج}{آ}$ = کوٹ $\frac{آ}{ب}$ کوٹ $\frac{ب}{ج}$ کوٹ $\frac{ج}{آ}$

۱۶ سن ا + سن ب سن ج = سن کوس $\frac{آ}{ب}$ کوس $\frac{ب}{ج}$ کوس $\frac{ج}{آ}$

۱۷ سن آ کس ب سن ج = سن $\frac{آ}{ب}$ کوس $\frac{ب}{ج}$ سن ج

۱۸ کوس آ + کوس ب + کوس ج + سن کوس آ کوس ب کوس ج + ۱ = ۰

۱۹ کوس آ + کوس ب + کوس ج + ۱ = سن کوس آ کوس ب کوس ج

۲۰ کوس $\frac{آ}{ب}$ + کوس $\frac{ب}{ج}$ + کوس $\frac{ج}{آ}$ = سن کوس $\frac{آ}{ب}$ کوس $\frac{ب}{ج}$ کوس $\frac{ج}{آ}$

۲۱ کوس $\frac{آ}{ب}$ - کوس $\frac{ب}{ج}$ + کوس $\frac{ج}{آ}$ = سن کوس $\frac{آ}{ب}$ کوس $\frac{ب}{ج}$ کوس $\frac{ج}{آ}$

$$۲۲ \quad \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} = ۱ = \text{سن } \frac{۱}{۲} - \text{سن } \frac{۱}{۲} - \text{سن } \frac{۱}{۲}$$

$$\text{سن } \frac{۱}{۲} - \text{سن } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۳ \quad \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} = ۲ = \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۴ \quad \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} = ۲ = \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۵ \quad \text{ٹان } \frac{۱}{۲} + \text{ٹان } \frac{۱}{۲} + \text{ٹان } \frac{۱}{۲} = ۱ = \text{ٹان } \frac{۱}{۲} + \text{ٹان } \frac{۱}{۲} + \text{ٹان } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۶ \quad \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} = \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۷ \quad ۱ + \text{کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲} = \text{کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲}$$

$$+ \text{کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲} = \text{کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۸ \quad \text{کوٹ } \frac{۱}{۲} + \text{کوٹ } \frac{۱}{۲} + \text{کوٹ } \frac{۱}{۲} = \text{کوٹ } \frac{۱}{۲} + \text{کوٹ } \frac{۱}{۲} + \text{کوٹ } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۹ \quad \text{سن } \frac{۱}{۲} = \frac{(\text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲})}{\text{سن } \frac{۱}{۲}} = \frac{(\text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲})}{\text{سن } \frac{۱}{۲}}$$

$$\text{ٹان } \frac{۱}{۲} + \text{ٹان } \frac{۱}{۲} + \text{ٹان } \frac{۱}{۲} = \text{ٹان } \frac{۱}{۲} + \text{ٹان } \frac{۱}{۲} + \text{ٹان } \frac{۱}{۲}$$

$$(\text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲}) = ۲ \quad ۲ \text{ کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲} = \text{کوس } \frac{۱}{۲} + \text{کوس } \frac{۱}{۲}$$

$$۳۰ \quad \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} = \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲}$$

کوس $\frac{۱}{۲}$ اگر ن ایک صحیح عدد $\frac{۱}{۲}$ م + ایا $\frac{۱}{۲}$ م + م کے صورت کا ہوگا۔

$$۳۱ \quad \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} = \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲} + \text{سن } \frac{۱}{۲}$$

سن $\frac{ن}{م}$ اگر ن ایک صحیح عدد m یا $m + ۲$ کی صورت کا ہوگا۔
 $۳۳ -$ کوس $\frac{۱}{۲}$ کوس $\frac{۱}{۲}$ کوس $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ کوس $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ کوس $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$
 $۳۰ -$ $\frac{ٹان آ}{ٹان ب} + \frac{ٹان ج}{ٹان آ} + \frac{ٹان ب}{ٹان ج} + \frac{ٹان آ}{ٹان ب} + \frac{ٹان ج}{ٹان آ} + \frac{ٹان ب}{ٹان ج} =$
 سک آ سک ب سک ج - ۲

۳۶ - اگر چار زاویوں کا مجموعہ = m قائمہ کرواؤ کی منجنت کا حاصل = برابر ہوگا اونکی منجنت کی حاصل ضرب کو مجموعہ سے اگر تین تین کر کے اکٹھا لیے جاوے۔

۳۷ - اگر ٹان $\frac{ن}{م}$ $\frac{ٹان آ}{ٹان ب} = \frac{ٹان ج}{ٹان آ}$ = برابر ہوا ایک عدد کے تو ثابت کرو کہ ٹان $\frac{ن}{م}$
 $\frac{ٹان ب}{ٹان ج} = \frac{ٹان آ}{ٹان ب}$

۳۸ - اگر ٹان $\frac{ن}{م}$ $\frac{ٹان آ}{ٹان ب} = \frac{ٹان ج}{ٹان آ}$ = برابر ہو کر وہ ٹان $\frac{ن}{م}$ = ٹان $\frac{ن}{م}$
 $\frac{ٹان ب}{ٹان ج} = \frac{ٹان آ}{ٹان ب}$

۳۹ - اگر کوس $\frac{ن}{م}$ کا برابر ہو $\frac{کوس آ}{کوس ب} = \frac{کوس ج}{کوس آ}$ اور کوس $\frac{ن}{م}$ کا برابر ہو کوس $\frac{ن}{م}$ اور ٹان $\frac{ن}{م}$ کا برابر ہو
 تو ثابت کرو کہ ٹان $\frac{ن}{م}$ = ٹان $\frac{ن}{م}$

۴۰ - اگر کوس $\frac{ن}{م}$ = کوس $\frac{ن}{م}$ = ہو کوس $\frac{ن}{م}$ اور سن = ہس $\frac{ن}{م}$ = ہس $\frac{ن}{م}$
 تو ثابت کرو کہ ٹان $\frac{ن}{م}$ = ٹان $\frac{ن}{م}$

۴۱ - اگر اوپس $\frac{ن}{م}$ برابر ہو اوپس $\frac{ن}{م}$ تو ثابت کرو کہ کوٹ ب - کوٹا:
 کوٹ (۱+۵) + کوٹ (۱-۵)

ذیل کی مساواتوں کا جواب نکالو

۱ سس کا + کوس کا = ۳۲ جواب کا = $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶

۲ ۳۲ سس کا - کوس کا = ۳۲ جواب کا = $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶

۳ سس ۲ کا = کوس کا جواب کا = $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶

۴ (۳۲ - ۱۶) (سک کا + کوس کا) = ۱۶ (سک کا ٹان کا + کوس کا کوٹ کا)

جواب کا = ۱۶ + $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶ + (۱ - ۱) = ۱۶

۵ کوس کا - کوس ۲ کا = سس ۲ کا جواب کا = $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶

$\frac{۳۲}{۲}$ ±

۶ کوٹ کا - ٹان کا = کوس کا + سس کا جواب کا = ۱۶ + $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶

۲ (۱ - ۱)

۷ سس کا + سس ۱ کا = ۱۶ جواب کا = (۱ + ۱) $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶

۸ ٹان کا + کوٹ ۱ کا = سس کا (۱ + ٹان کا ٹان کا) جواب کا = (۱ + ۱) $\frac{۳۲}{۲}$

۹ سس ۲ کا - سس ۱ کا = سس ۱ کا جواب کا = ۱۶ ± $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶

۱۰ کوس کا = کوس ۱ کا جواب کا = $\frac{۳۲}{۲}$ = ۱۶

۱۱ کوس کا کوس ۲ کا = کوس ۱ کا کوس کا جواب کا = $\frac{۳۲}{۲}$

$$۱۲ \quad \text{سس کا سس کا} = \frac{۱}{۲} \quad \text{جواب کا} = \text{ن پ} \pm \frac{\text{پ}}{\text{ن}} \text{ٹان پ} \pm \frac{\text{پ}}{\text{ن}}$$

$$۱۳ \quad \text{سس کا} + \text{سس کا} = \text{سس کا} = ۳ \quad \text{جواب کا} = \text{ن پ} \pm \frac{\text{پ}}{\text{ن}}$$

$$۱۴ \quad (۱ - \text{ٹان کا}) (۱ + \text{سس کا}) = ۱ + \text{ٹان کا} \quad \text{جواب کا} = \text{ن پ ٹان پ} + \frac{\text{پ}}{\text{ن}}$$

$$۱۵ \quad \text{سس کا} + \text{سس کا} + \text{سس کا} + \text{سس کا} = ۰ \quad \text{جواب}$$

$$\text{سن} = \frac{۵}{۲} = ۰ \quad \text{یا کو س کا} = ۰ \quad \text{یا کو س کا} = \frac{۵}{۲} = ۰$$

$$۱۶ \quad \text{سن کا} - \text{کوس کا} = \text{سس کا کو سس کا} \quad \text{جواب}$$

$$\text{کوس کا} + \text{سس کا} = ۰ \quad \text{یعنی کوس کا} = \text{کوس کا} (۳ + \frac{\text{پ}}{\text{ن}})$$

$$۱۷ \quad (\text{کوٹ کا} - \text{ٹان کا})^۲ = (۳ - ۲)^۲ = ۱ \quad \text{جواب کا} = \text{ن پ} \pm \frac{\text{پ}}{\text{ن}}$$

$$۱۸ \quad ۲۲ \text{م کو س کا} = (\frac{\text{پ}}{\text{ن}} - \text{کا}) (۱ + \text{سس کا}) = ۱ + \text{کوس کا} \quad \text{جواب}$$

$$\text{سس کا} = ۰ - ۱ \text{یا سس کا} = \frac{۵}{۲} = ۰ \quad \text{یا ٹان کا} = \frac{۵}{۲} = ۲$$

$$۱۹ \quad \text{سن کا} + \text{سس کا} + \text{سس کا} = ۱ \quad \text{جواب}$$

$$\text{کا} = (۱ + \text{ن کا}) \frac{\text{پ}}{\text{ن}} \quad \text{یا کا} = \text{ن پ} + (۱ - \text{ن کا}) \frac{\text{پ}}{\text{ن}}$$

۱ اگر کسی مثلث کے ضلع لا + لا + لا اور لا + لا + لا ہو تو ثابت کرو کہ سب سے

بڑا زاویہ ۱۲۰ کا ہوگا۔

۲ اگر کوس x = $\frac{س}{۲}$ تو ثابت کرو کہ یہ مثلث متساوی الساقین ہوگا۔

۳ کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں جبکہ زاویہ ت قایمہ ہے کوٹ $\frac{۲}{۳} = \frac{و+ٹ}{۲}$

۴ اگر ٹ ٹان ت ٹٹان ر = (ٹ + ٹ) ٹان $\frac{ت+ٹ}{۲} = \frac{نوٹ}{۲} = \frac{کوس ت}{کوس ر}$

۵ اگر کسی مثلث کے زاویے سلسلہ ضرب میں ہوں کہ جبکی عام ضرب $\frac{۱}{۲}$ ہو تو ثابت کرو

کہ سب سے بڑا ضلع اور مجموعہ کل اضلاع سے وہ پست ہو گئے جو $\frac{۲}{۳}$ سن $\frac{پ}{۱۲}$ ایک کے ساتھ ہے

۶ اگر دو ت رکسی مثلث کے بیرونی زاویہ ہوں

دو ٹ ژ ورس د + ۲ ڈژ ورس ت + ۲ ٹ ورس ر = (ٹ ژ ٹو)

۷ اگر کسی مثلث اب ج کے از او یہ سے قاعدہ پر ا د عمود گرا دیں اور و سے نوٹ

اور د ع عمود آب اور ا ج پر ڈالے تو ثابت کرو کہ $ا ط \times ب ط = ج کوس ج =$

اع \times ع ج کوس ب

۸ اگر اب ج کسی مثلث کے ضلع ہوں اور اگر اونکی سلنس والہ زاویہ دو ۸۳ ۸ اور

۸۴ ہوں تو ثابت کرو کہ ٹان ب $= ۸ \left(\frac{۲}{۱۸۳} - ۱ \right)$

۹ اگر اب ج مثلث کا ج زاویہ منفرد ہو تو ثابت کرو کہ ٹان آ ٹان ب ایک حکم ہے

۱۰ اگر ڈژ ٹ کسی مثلث کے ضلع ہوں اور و سے سلسلہ جمع میں ہوں تو ثابت کرو۔

$$\text{سکوس } \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ س } 2 \text{ اور ڈکوس } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ ٹرکوس } \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ ٹ}$$

۱۱ اگر کسی مثلث کے بج ضلع کو دو نقطہ پر دو برابر حصوں میں تقسیم کریں تو کوٹ با

$$\text{— کوٹ ب} = 2 \text{ کوٹ ا}$$

۱۲ اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ ایسے دو حصوں میں تقسیم کریں کہ اونکی سین مین وہی نسبت ہو

جو اونکو نزدیک والے ضلعوں میں ہے تو ثابت کرو کہ اونکی کوٹجٹ کا فرق =

اونکی ضلعوں کے سامنے والہ زاویوں کے کوٹجٹ کے فرق سے۔

۱۳ اگر کسی مثلث کے زاویوں کا کوٹجٹ سلسلہ جمع میں ہو تو اس کے ضلعوں کا مربع بھی سلسلہ جمع

میں ہوگا۔

۱۴ اگر کسی مثلث کے قاعدہ کے سامنے والہ زاویہ اور مع نسبت قاعدہ اور ارتفاع کے معلوم

ہو اس زاویہ سے قاعدہ پر عمود ڈالنے سے جن دو حصوں میں وہ زاویہ تقسیم ہوتا ہے

اونکا ٹجٹ کیا ہوگا +

۱۵ اگر کسی مثلث کا قاعدہ تین برابر حصوں میں تقسیم کریں اور ل اور ۲ اور ۳ اور ان

زاویوں کا ٹجٹ جو کہ نقاط تقسیم اور قاعدہ کے سامنے والہ زاویہ سے ملا کر بنی ہیں ہو

$$\text{تو ثابت کرو } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{1}{4} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

۱۶ اگر کسی مثلث کے زاویوں کا سلسلہ جمع میں ہو تو سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ

نصف کے بیجنٹ کا حاصل ضرب $\frac{1}{2}$ ہوگا۔

۱۷ اگر کسی شلت کی رت ضلع کو نقطہ میں برابر تقسیم کریں اور د کو ملا دیوین تو ثابتن

$$د ط ت = \frac{ط ۲ ر سن د}{ط ۲ - ط ۲}$$

۱۸ اگر آب ج کسی شلت کے تینوں زاویہ ہوں اور کوٹ $\frac{1}{4}$ او کوٹ $\frac{1}{4}$ اور

$$کوٹ \frac{1}{2} \text{ سلسلہ جمع میں ہو تو ثابت کرو کہ کوٹ } \frac{1}{4} \text{ کوٹ } \frac{1}{4} = ۳$$

۱۹ اگر کسی شلت کے آب زاویوں سے خطوط کھینچ جاویں کہ جزاویوں کو ایسے دو حصوں میں

تقسیم کرے کہ اون حصوں کے سین میں وہ نسبت ہو جو ایک کون سے ہے اور

اگر یہ خطوط وال نقطہ میں تقاطع کریں تو ثابت کرو کہ وہ خواہ زاویہ ج کو دو برابر حصوں

تقسیم کرنا ہو خواہ ایسے دو حصوں میں کہ جن کے سین میں وہی نسبت ہو جو کہ آ اور ن آ سے ہو

۲۰ اگر ل نسبائی ہو اس خط کے کہ جزاویہ آ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا ہے اور قاعدہ

$$\text{زاویہ بنانا ہو تو ثابت کرو کہ شلت کے کل ضلعوں کا مجموعہ} = \frac{ط ۲ کو س ط ۲ س ط}{سن ط - سن ط}$$

۲۱ اگر کسی شلت کا سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ ط اور ع ہو اور اس کے ضلع سلسلہ جمع میں

$$\text{ہوں تو ثابت کرو } ۳ (۱ - کو س ط) (۱ - کو س ع) = کو س ط + کو س ع -$$

ثابت کرو کہ مساوات ۲۲ سوال ۲۹ سوال تک

کسی شلت میں صحیح ہے

۲۳ ڈال (ٹ کو س۔ ر۔ ٹ کو س ت) = ٹ-۲، ٹر

۲۳ ڈال (کوس ت کوس ر + کوس د) = ٹ (کوس و کوس ر + کوس ت) = ر (کوس د کوس ت + کوس و)

$$۴۴ \quad (ٹ + ژ - و) \text{ ٹان} = \frac{1}{۲} = (ژ + و - ٹ) \text{ ٹان} = \frac{۲}{۴} = (و + ٹ - ژ) \text{ ٹان} = \frac{۴}{۴}$$

۲۵ ٹکوس ت + ٹکوس ر = ڈکوس (ت-ر)

۲۶ (ڈال + ٹ) کو س + ر (ٹ + ٹ) کو س + و (ر + ڈ) کو س + ت = ڈ + ٹ + ٹ

۴، (ط^۲-ط^۱) کوٹ ۱، (ط^۲-ط^۱) کوٹ ۲، (ط^۲-ط^۱) کوٹ ۳ = ۰

۲۱ (ڈ-ٹ) کوٹ $\frac{1}{4}$ + (ڑ-ز) کوٹ $\frac{2}{5}$ + (ٹ-ث) کوٹ $\frac{2}{5}$ = ۰

$$29 \quad 1 - \frac{\text{ثمان}}{\frac{1}{2} \text{ ثمان}} = \frac{2}{2} = 1$$

۳۔ (ڈبٹ + بڑ) (کوس + کوس + کوس) = ۲ کوس ۱ + ۲ کوس ۲ + ۲ کوس ۳ + ۲ کوس ۴

$$۳۱ \quad \frac{\text{سین د}}{\text{د م}} = \frac{\text{کوس د کوس ت}}{\text{ت م}} + \frac{\text{کوس د کوس ر}}{\text{ر م}} + \frac{\text{کوس ت کوس د}}{\text{د م}}$$

۳۲ ڈوکوس + ٹکوس ت + ٹکوس ر = ۳ ٹوسن ت سن ر

$$3 \text{ کوس و } + \text{ کوس ت } + \text{ کوس ر } = 1 + \frac{4 \text{ کوس ت سن ر}}{1 + 1 + 1}$$

$$۳۴ \quad ۲-۲ \text{ ڈیٹ کوس } (۹۰+۱) = ۲-۲ \text{ ٹر کوس } (۹۰+۱)$$

۳۵ کوٹ د - کوٹ کد : کوٹ ٹ + کوٹ ر :: ت + ز - و : ی و

$$۳۶ \text{ کوس }^۱ \frac{۲}{۴} \text{ کوس }^۲ = \frac{۱}{۴} \text{ سہ } (\text{ع}-\text{کوس } \frac{۲}{۴}) (\text{ع}-\text{کوس } \frac{۲}{۴}) (\text{ع}-\text{کوس } \frac{۲}{۴})$$

$$\text{آئین ۲} = \text{کوس } \frac{2}{3} + \text{کوس } \frac{1}{3} + \text{کوس } \frac{1}{3}$$

$$\text{۳۷ کسی مثلث کے ضلعوں کا مجموعہ} = 2 \text{ کوس } \frac{2}{3} + \text{کوس } \frac{1}{3} + \text{کوس } \frac{1}{3}$$

$$\text{۳۸ اگر لسن } 2 \text{ سن } 2 \text{ ت} = \text{وس } 2 \text{ ات} + \text{ل سن } 2 \text{ ر} = \text{ن سن } 2 \text{ ر} + \text{وس } 2 \text{ د}$$

$$\text{تو ن : ل : د :: سن } 2 \text{ د : سن } 2 \text{ ت : سن } 2 \text{ ر}$$

$$\text{۳۹ سن } \frac{1}{2} \text{ س } \frac{1}{2} \text{ سن } \frac{1}{2} \text{ کم ہے ایک سے سوا ہی اوس حالت کے کہ جب د = ت}$$

$$\text{۱ اگر سن } 2 \text{ ت} = 2 \text{ د اور } 2 \text{ د} = 2 \text{ ت} = 2 \text{ د تو زاویہ د کی مقدار کیا ہوگی}$$

$$\text{جواب د = ۹۰ یا ۱۵۰}$$

$$\text{۲ اگر کسی مثلث کا ایک ضلع دوسرے دو چند ہو اور زاویہ د نیسانی ۶۰ کا ہو تو باقی زاویہ کیا ہوگی}$$

$$\text{جواب ۳۰ و ۹۰}$$

$$\text{۳ اگر کسی مثلث کے ضلعوں میں وہ نسبت ہو جو ۲ اور ۶ اور ۴ سے ہو تو اونکی زاویہ کون کونسی ہوگی}$$

$$\text{جواب ۴۰ و ۶۰ و ۸۰}$$

$$\text{۴ اگر د = ۱۸ ڈ = ۴ اور ۴ = ۴ + ۴ = ۴ تو مثلث کو دریافت کرو۔}$$

$$\text{جواب ت = ۹۰ = ۴ اور ۴ = ۴ (۵۲۲ + ۵)}$$

$$\text{۵ اگر د = ۳۰ ڈ = ۱۰۰ اور ۴ = ۴ ہو تو اسکا مثلث دریافت ہو سکتا ہو یا نہیں۔}$$

$$\text{جواب مثلث غیر ممکن ہے}$$

۶ اگر $\angle A = 90^\circ$ اور $\angle B = 90^\circ$ تو مثلث کے باقی ضلع اور زاویہ دریافت کرو۔

جواب زاویہ $\angle C = 90^\circ$ یا 90°

۷ اگر $\angle A$ اور $\angle B$ معلوم ہوں اور $\angle C$ چھوٹا ہوٹ سے اور اگر $\angle A$ اور $\angle B$ تیسرے ضلع کو دو مقدار ہوں

تو $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$ اور $\angle C$ کو $\angle C$ د

۸ حالت مشتبہ میں دریافت کرو کہ دونوں مثلث کے سطح کا مجموعہ کیا ہوگا۔

جواب $\angle C$ کو $\angle C$ د

۹ اگر حالت مشتبہ میں دو مثلث کے زاویہ $\angle A$ اور $\angle B$ اور $\angle C$ اور $\angle D$ ہوں

تو $\angle C = \frac{\angle A}{\sin A} + \frac{\angle B}{\sin B}$ اور $\angle C$ کو $\angle C$ د

۱۰ اگر حالت مشتبہ میں ایک مثلث کے سطح دوسرے مثلث سے n گونہ ہووے

تو ثابت کرو کہ اگر $\angle A$ دیے ہوئے ضلعوں میں سے $\angle A$ اور $\angle B$ چھوٹا ہو تو $\angle C$ ایک سے

بڑا ہے مگر $\frac{1}{n-1}$ سے چھوٹا ہے

۱۱ اگر $\angle A = 90^\circ$ اور $\angle B = 90^\circ$ تو اس حالت میں یہ مثلث مشتبہ ہی یا نہیں۔

جواب نہیں مگر یہ مثلث قائمہ الزاویہ ہے زاویہ $\angle C = 90^\circ$ مساوات سے دریافت

کر کے ثابت کرو کہ کسی مثلث

۱۲ کو $\angle C = 90^\circ$ برابر $\angle A$ اور $\angle B$ کو $\angle C = 90^\circ$ اور $\angle C = 90^\circ$

$$۱۳ \text{ اگر } \theta = ۲۲^\circ \text{ سن } \frac{۱}{۲} \text{ تو } \theta = (۲۰^\circ - ۱^\circ) \text{ سک ع}$$

$$۱۴ \text{ دت رشت مین اگر } \theta = ۱۸^\circ \text{ اور } \theta = ۲۰^\circ \text{ اور } \theta = ۲۲^\circ \text{ تو دریافت کر دل ثمان } \theta \text{ کیا ہوگا}$$

$$\text{جیکہ معلوم ہو کہ } \theta = ۲^\circ = ۳۰۱۰۳۰۰ \text{ اور } \theta = ۳^\circ = ۴۴۴۱۲۱۳$$

$$۱۵ \text{ اگر کسی شلت کے تینوں ضلع } ۳۲ \text{ اور } ۴۶ \text{ ہوں تو سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو}$$

$$\text{جیکہ معلوم ہو کہ } \theta = ۲۰^\circ = ۵۹۶۰۳ \text{ اور } \theta = ۱۰۶^\circ = ۳۶۰۳۰۵۹۹۶$$

$$\text{ل کو } \theta = ۱۸^\circ ۶۹' = ۲۴۲۴۲۴۲۴ \text{ اور فرق } ۱ = ۳۴۳۳۳۰۰$$

$$۱۶ \text{ اگر کسی شلت کے ضلع چار اور پانچ وچہ ہوں تو زاویہ ت دریافت کرو جیکہ معلوم ہو}$$

$$\theta = ۲^\circ = ۳۰۱۰۳۰۰$$

$$\text{اور ل کو } \theta = ۲^\circ = ۳۰۱۰۳۰۰ \text{ اور فرق } ۱ = ۴۴۴۱۲۱۳$$

$$۱۷ \text{ اگر کسی شلت کے ضلع پانچ وچہ سات فیت ہو تو سب سے بڑا زاویہ کوس } \theta = \frac{۱}{۲} \text{ (۵) } \theta \text{ ہوگا}$$

$$\text{سے دریافت کرو جیکہ معلوم ہو } \theta = ۶^\circ = ۵۹۶۰۳ \text{ اور } \theta = ۱۰۶^\circ = ۳۶۰۳۰۵۹۹۶$$

$$\text{اور فرق } ۶۰ = ۳۶۰۳۰۵۹۹۶$$

$$۱۸ \text{ اگر کسی شلت کے دو ضلع } ۱۸ \text{ اور } ۲۴ \text{ فیت ہوں اور زاویہ درمیانی } \theta \text{ تو باقی زاویہ دریافت کرو جیکہ}$$

$$\text{معلوم ہو } \theta = ۲^\circ = ۳۰۱۰۳۰۰ \text{ اور ل کو } \theta = ۲^\circ = ۳۰۱۰۳۰۰ \text{ اور } \theta = ۱۰۶^\circ = ۳۶۰۳۰۵۹۹۶$$

$$۱۹ \text{ اگر کسی شلت کے دو ضلع } ۱۸ \text{ اور } ۲۴ \text{ فیت ہوں اور زاویہ درمیانی } \theta \text{ تو باقی زاویہ دریافت کرو جیکہ}$$

۱۹ کسی مثلث کے دو ضلعوں میں وہ نسبت ہے جو کہ ۹ کو سات کے ساتھ ہے اور زاویہ دریا

۱۲ کہ ہے تو باقی زاویہ دریافت کرو جبکہ معلوم ہو $۲ = ۳۰۱۰۳۰۰$ اور

لٹان ۵۰ = ۱۰۵۲۰۲۵۲۵۵ اور لٹان ۱۱ = ۱۶ = ۹۵۲۹۹۳۲۱۶ اور

لٹان ۱۱ = ۹۵۲۹۹۹۰۴ = ۴

۲۰ اگر ڈ = ۱۰ اور ٹ = ۳۰ اور ر = ۳۶ = ۵۲ = ۱۲ تو باقی زاویوں کو دریافت کرو جبکہ

لٹان ۳ = ۳ = ۱۲ = ۱۲ اور لٹان ۱۸ = ۲۶ = ۶ = ۱۲ = ۱۲ = ۱۰۶۴۴

۲۱ کسی مثلث کے دو زاویوں میں وہ نسبت ہے جو کہ ۹ کو سات سے ہے اور زاویہ دریا

۵۰ = ۲۰ تو باقی زاویہ دریافت کرو جبکہ معلوم ہو $۲ = ۳۰۱۰۳۰۰$ اور لٹان ۱۱ = ۱۶

۳۰ = ۲ = ۳۰ = ۳۰ = ۱۰۵۲۰۲۵۲۵۵ اور لٹان ۱۱ = ۱۶ = ۹۵۲۹۹۳۲۱۶ اور فرق ۱ = ۱۰۶۴۴

۲۰ اگر ایک مثلث میں ڈ = ۳۰ ٹ = ۲۰ اور زاویہ دریا فی ۲۲ ہو تو باقی زاویہ دریافت کرو جبکہ

معلوم ہو کہ لٹان ۱۱ = ۱۰۵۲۰۲۵۲۵۵ اور لٹان ۱۱ = ۱۶ = ۹۵۲۹۹۳۲۱۶

لٹان ۱۱ = ۱۰۵۲۰۲۵۲۵۵ اور لٹان ۱۱ = ۱۶ = ۹۵۲۹۹۳۲۱۶

۲۳ اگر ٹ = ۱۱ = ۱۰ اور ڈ = ۹۰ تو ثابت کرو کہ ٹ = ۹۰ = ۲۶ جبکہ معلوم ہو کہ

لٹان ۱۱ = ۱۰۵۲۰۲۵۲۵۵ اور لٹان ۱۱ = ۱۶ = ۹۵۲۹۹۳۲۱۶

۲۴ کسی مثلث کے ضلع، وہ دو ہیں تو تینوں زاویوں کو دریافت کرو جبکہ معلوم ہو $۲ = ۳۰۱۰۳۰۰$

۱۰ اگر $\angle A = 3$ لسن $\angle B = 22$ اور $\angle C = 123$ تو زاویہ دریافت کرو
 ۳ اگر کسی مثلث کا قاعدہ اور ارتفاع اور قاعدہ کے زاویوں کا فرق معلوم ہو تو ثابت کرو
 کہ کس طرح مثلث کی باقی جزو معلوم ہو سکتے ہیں۔

۴ اگر کسی مثلث کے تینوں زاویوں سے سامنے والے ضلعوں کا عمود معلوم ہو تو مثلث کے کل
 ضلعے اور زاویے کیونکر دریافت ہو سکتے ہیں۔

۱ ایک متعامت سے جو زیر کسی پہاڑ کے واقع ہے دریافت ہوا کہ اس کے چوٹی ۱۰ کے
 ارتفاع پر ہے اور بعد چلنے ایک میل جانب چوٹی مذکورہ کے مقام پر جو ایسے سطح پر
 واقع ہے کہ سطح افقی سے ۳۰ کا زاویہ بناتا ہے زاویہ ت ر دریافت ہوا
 ۵ اس سے نو بندی اوس پہاڑ کی کیا ہوگی۔

۲ اگر کسی برج کے پائین سے ایک سطح افقی پر ۱۰ اگرز کے فاصلہ پر اوسکی چوٹی ۳۰ کی پائی جاو
 تو ارتفاع برج کی کیا ہوگی۔

۳ ایک برج کے خاصہ کنویرب کی طرف مقام د پر اوسکے بندی ۳۰ دریافت ہوا اور د
 سے خاصہ نیم کی طرف آ فاصلہ پر ت مقام سے ۱۰ کی بندی دریافت ہوئی
 کہ برج کی بندی = $\frac{1}{2} (10 + 30)$

۴ اگر ایک سطح افقی پر ایک برج مع مینار واقع ہو اور کوئی شخص اوس برج سے ۱۰

فاصلہ پر وہ برج اور ایک پہاڑ کی چوٹی کو ایک خط راست میں دیکھی اور برج کے
بہت فٹ فاصلہ پر اس شخص کو دریافت ہو کہ مینار او سکی نظر میں دہی زاویہ رکھتا ہے جو کہ پہلے
دیکھتا اور اس کے چوٹی پہاڑ کی چوٹی سے ایک خط راست میں ہے تو ثابت کرو کہ اگر بلندی
سطح افقی سے جو کہ اس کی آنکھ سے گزرتی ہے ج فٹ ہو تو اونچائی پہاڑ کی اسی علم
سے $\frac{AB}{J}$ فٹ ہوگا۔

۵ اگر ایک شخص کسی جگہ سے ایک برج کا فاصلہ دریافت کرنا چاہے کہ جہاں وہ پہنچ نہیں
سکتا ہے اور سطح افقی پر تین جگہ سے دریافت ہو کہ زاویہ بلندی برج کا ہر سہ مقام سے
یکساں ہے تو ثابت کرو کہ فاصلہ کس طرح دریافت ہو سکتا ہے۔

۶ ایک شخص اوج مقام میں فاصلہ دریافت کر سکے جہاں وہ پہنچ نہیں سکتا ہے اب اس
دیکھان ایسے مقام پر کھڑا ہو جہاں سے وہ اور اب مقام ایک سیدہ میں ہو اور وہاں سے
ایسی جانب کو چلا کہ جواب پر عمود ہے اور اس خط میں فاصلوں کو دریافت کیا
جہاں سے ج اور ب ج اس کے ساتھ ایک سیدہ پہاڑ اور ان مقامات سے
اس خط عمود کو ساتھ اون جگہوں کا زاویہ بھی دریافت کیا تو ثابت کرو کہ اور مقامات میں
فاصلہ کس طرح دریافت ہو سکتا ہے۔

۷ دو بلین اب اور ج و کسی دریا کے ایک کنارے پر ایسی کٹری کی گئی ہیں کہ

فاصلہ آج = اب کے اور اونچائی ج د کی ایسی ہے کہ ایک مقام س سے جو دوسرے کنارہ پر آ کے غصہ سامنے ہے اب اور ج د کی زاویہ یکساں ہیں تو ثابت کرو کہ دریا کی چوڑائی کا مربع = $\frac{اب^2}{ج د^2}$ اور مقام س سے آ اور س ج کا زاویہ ایک ہے۔

۸ ایک جنڈالٹ اونچائی کا ایک برج ب فٹ اونچائی پر کھڑا ہے تو دریافت کرو کہ سطح افقی پر جو برج کے پائین سے گذرتی ہے وہ کونسا مقام ہے جہاں سے برج اور جنڈالٹ برابر زاویہ میں نظر آوے اور دیکھنے والے کی آنکھ کی اونچائی وقت ہے۔

۹ ایک سطح افقی پر ایک برج شمال کی طرف جھکا ہوا ہے اور دو مقام پائین سے خاص و اکسن کی طرف لگاؤ ب فاصلہ پر برج کی چوٹی ج اور ع زاویہ کی بناء ہی پر ہے یہ ثابت کرو کہ اگر برج کا جکاؤ ط ہو اور چوٹی سی سطح افقی پر جو عمود کی چاہوے اس کی اونچائی وقت ہو تو ٹان ط = $\frac{ب-ا}{ج-د}$ اور و = $\frac{ب-ا}{ج-د}$ کو ٹان ط کا

۱۰ اگر لفٹ اونچی کوئی شے ایک برج پر ہو اور برج کے پائین سے جو سطح افقی گذرتی ہے اس پر ب فٹ کی فاصلہ سے وہ شے ط زاویہ بناتی ہے تو دریافت کرو کہ برج کی اونچائی کیا ہے۔

۱۱ ایک دریا کے کنارے پر دو سوفٹ اونچا ایک ستون ہے جس پر ۳۰ فٹ اونچی ایک

مورت بنی ہوئی ہے نہ اگر ایک شخص دریا کے دوسرے کنارے پر سے اوس مورت کو
اور ایک شخص چہ فٹ اونچا جو ستون کی پائین کٹا ہے برابر زاویہ میں دیکھی تو دریافت کرو
کہ دریا کی چوڑائی کیا ہوگی۔

۱۲ ایک مکان کی اونچائی سامنے والے مکان کی کمر کی سے ایک زاویہ قائمہ بتاتی ہے اور چوڑائی
مکان کی بنیاد اسی سے ۹۰ کا زاویہ بتاتی ہو اگر چوڑائی سڑک بنیٹ ہو تو مکان کی بلندی
کیا ہوگی۔

۱۳ دو ستون برابر اونچائی کی ہیں ایک شخص نے اونکی درمیان ایک مقام سے جو اونکے پائین
کے ملانے والے خط پر واقع ہے ستون متصلہ کی ارتفاع ۶۰ دریافت کی اور اس مقام پر
خط کے عمود پر چہ فٹ جکر ان دونوں کی اونچائی ۵۴ اور ۳۴ دریافت ہوئی تو ستون کی
اونچائی کیا ہوگی۔

۱۴ اگر کسی شے کے پائین سے ایک خط افقی کھینچا جاوے اور اس خط کے تین مقام پر ا اور ب
اور ج سے اوس کا زاویہ باندہ دریافت ہو اور اگر زاویہ ب مقام کا آ مقام سے دو چھوٹے
اور ج کا آ سے سہ چھوٹے ہو اور اب = س اور ب ج = ص کے ہو تو ثابت کرو کہ
اونچائی اوس شے کی س = ص (۳ ص) (۳ ص) (۳ ص) اور اگر آ مقام کے زاویہ کا
ٹینجنٹ $\frac{1}{2}$ ہو تو ثابت کرو کہ ۵ ص = ۱۳ ص

روشنی خاص دائرہ افقی میں نظر آئی اور اسی روشنی کی طرف ۳۰ منٹ چلکر جہاز کے
پائین پرستے جو سمندر کی سطح سے ۱۶ فٹ اونچائی پر ہی وہی روشنی سابقہ نظر پر ہی
فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے کہ جبکہ فاصلہ سطح سے مرکز تک ... میل ہو تو دریا
کہ جہاز کے ... باب سے چل رہا تھا

۲. ایک شخص کسی پہاڑ پر ایسی جگہ سے چڑھ گیا کہ جو پائین سے چوٹی تک سیدھے ہونے کے قائلہ
رکتی ہے اور راہ کا جھکاؤ سطح افقی سے اول میں ۱۰ زاویہ تھا لیکن تھوڑی دور کر کے بعد
آگے بڑھ کر تباہ ہو گیا اور اسی طرح پر رہا چوٹی پر پہنچ کر اوس نے پراسٹرس دریافت کیا
کہ وہ آٹ فٹ اونچائی پر پہنچ گیا ہے اور وہاں سے دریافت کیا کہ مقام کوچ کا ج ناؤ
کی جھکاؤ پرستے تو ثابت کر دے کہ فاصلہ چڑھائی کا $\frac{1}{2}$ کو سین $\frac{1}{2}$ سن

۲. اگر ایک سطح افقی پر دو مقام سے ایک شے زاویہ ب اور ب اونچائی پر دکھائی دے تو
اور اگر ایک تیسری مقام سے جو اون دونوں مقاموں کی ملائے والی سیدھی خط پر
واقع ہے اور ان سے ج اور ج کے فاصلہ پر ہے زاویہ ط کے اونچائی پر نظر آو
تو ثابت کرو کہ اوس شے کی اونچائی سطح افقی سے

سن ب سن ب سن ط (ج ج + ج ج)

{ ج سن ب (سن ط سن ب) + ج سن ب (سن ط سن ب) }

۲۲ ایک شخص نے ایک سیدھی راہ پر چلتی ہوئے دو پہاڑوں کی چوٹی کو ایک دوسرے کے سامنے ہیں لیکن ایک پہاڑ دوسرے کے کچھ آگے ہے زاویہ B اونچائی پر دیکھا جائے جہاں چلنے کے پیچھے والا پہاڑ یکساں کی چوٹی پر دیکھا جائے اور سامنے والا پہاڑ کی اونچائی کو ثابت کرنے سے معلوم ہو کہ زاویہ کی اونچائی پر ہے تو دریافت کرو کہ دونوں پہاڑ کی اونچائی کیا ہے۔

۲۳ ایک برج خندق مدور سے گھرا ہے کسی روز دو پہر کی وقت برج کی چوٹی کا سایہ خندق کے کنارہ سے ۴۵ فٹ باہر نظر آتا ہے اور اسی روز جبکہ آفتاب خاص چمک کر جاتا ہے، تو سایہ خندق کے کنارہ سے ۱۲۰ فٹ کے فاصلہ پر ہوتا ہے ان دونوں سایوں کے درمیان فاصلہ ۲۵ فٹ ہے اور برج کی بلندی کا زاویہ خندق کے کنارہ پر کسی مقام پر "۳۰" درجہ اونچائی پر دریافت کرو اور آفتاب کی سما ارتفاع دو پہر کی وقت کیا ہوگی۔

۲۴ ایک برج کسی سطح خمیدہ کی ایک مقام پر واقع ہے اور اس کے ایک مقام ج سے وہ برج زاویہ ط پر نظر آتا ہے اور ایک مقام د سے جو خط ج پر ایسا واقع ہے کہ ج د = ج کے وہی برج زاویہ ع پر دیکھا گیا اگر برج اور سطح کا آج درمیانی زاویہ لا ہو تو ثابت کرو کہ کوٹ $\angle = 2$ کوٹ \angle - کوٹ \angle ع

۲۵ اگر ایک مثلث ABC کا زاویہ $D = 90^\circ$ \angle $ABC = 30^\circ$ اور $BC = 3$ تو باقی ضلع اور زاویہ

کیا ہونگے اور اگر فرض کریں کہ غلطی ۲ زاویہ و کے دریافت کریمین ہوئی ہو تو
زاویہ تین کس قدر غلطی ہوگی۔

۲۹ اگر کسی دریا کے ایک کنارہ پر دو مقاموں کا فاصلہ ج ہو اور دوسرے کنارہ پر کچھ
اوسط فاصلہ ناپ لیا جاوے اور اسکی دونوں صدون پر ج زاویہ ط اور ع بناتا ہو
اور دریا کے دونوں کنارہ متوازی ہوں تو دریافت کرو کہ اوس کی چوڑائی کیا ہوگی
۲۰ ایک پہاڑ پر ایک قلعہ شکل میں ہے کسی شخص نے اوسکی چوڑائی دریافت کر لیا ایک
کنارہ کے خاص و کمین طرف لیتا م سے دریافت کیا کہ قلعہ کے سامنے والی دیوار زاویہ
ط بناتی ہے اور پہلے مقام سے خاص چم فٹ چل کر دریافت کیا کہ وہی دیوار مثل
پہلے کو زاویہ بناتی ہی اور وہاں سے ب فٹ فاصلہ پر چل کر وہ شخص اوس دیوار کو دیکھ
کنارہ سے خاص و کمین طرف ہو گیا تو ثابت کرو کہ چوڑائی قلعہ کی (ا ب) کس فٹ
بہین کی طمان ع = $\frac{ب \times طمان \times ط}{ب}$

۲ ب ب یہ دو پہاڑوں کی چوٹی بین اور ب ج ایک سیدھا خط افقی ہے اگر نزدیک
والی چوٹی سترک کے کسی مقام پر کھڑی ہوئے کسی دوسرے چوٹی کو چپا لیں تو کیا
کہ کس ط س ن غ = سن ط س ن ع اس میں ب کی اونچائی ط ہے جو سترک پر
کسی مقام ن سے نظر آتی ہے اور ع زاویہ ب ن ج ہے اور ط ع اسی قسم کی مقدار

جو چوٹی ب نشان کی نسبت سرک کے ن مقام سے دیکھ چکے ہیں۔

۲۹ آ اور ب دو شے ایک سطح افقی پر قع ہے اور اوسى سطح پر ایک مقام م سے آب نابع

ط بتاؤ میں اور مقام م سے دو شخص اوسى سطح پر ایسے جانب چلے جو م ۱ اور م ب کے ساتھ

زاویہ قائمہ بنائے اور میان مقام ن و سے دریافت کیا کہ لب زاویہ ط بنائے اگر

فاصلہ م ن اور م و معلوم ہو تو اب کی لنبائی دریافت کرو

۳۰ آج ب ۲ مقام ایک سطح پر ہیں آج = ج ب اور آج اور ج ب سے ایک زاویہ قائمہ

بنائے اور اوسى سطح پر ایک مقام م سے آج اور ج ب زاویہ ط اور ج بناتے ہیں اور

اوسى سطح پر دوسرے مقام م نشان سے جو م سے و فاصلہ پر ہے اور ایسا کہ م م

اور ج م زاویہ قائمہ ہے آج اور ج ب زاویہ ط اور ج بناتے ہیں تو اب کا فاصلہ دیا

۳۱ ایک شخص ایک ی کے کنارہ سے دوسرے کنارہ پر ایک برج کی چوٹی کو ساتھ اوس خط

افقی کو دیکھ اوسکی آنکھ سے گزرتا ہے وہ درجہ کا زاویہ بناتی ہوئی دیکھا ہم فٹ چھوٹ کر اوس کو دیکھو

زاویہ بناتے دیکھا تو مری کی چوڑائی دریافت کرو جبکہ معلوم ہو کہ ل سن ۴ = ۹۶۰۸۵۸۹

ل سن ۴ = ۹۶۰۸۵۸۹ ل سن ۳ = ۹۶۰۸۵۸۹ ل سن ۲ = ۹۶۰۸۵۸۹

ل سن ۱ = ۹۶۰۸۵۸۹

۳۲ ایک برج ۵۰ فٹ اونچا اوس سطح افقی پر کہ جس پر واقع ہے ۵۰ فٹ سایہ گرنا

